UBLICATIONS DE L'INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MÉMOIRES ET CONFÉRENCES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS,
LA STATISTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, L'ÉCONOMÉTRIE

Jean GEFFROY

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES

(Deuxième partie)

G. MALECOT

LE PROBLÈME DU MOUVEMENT BROWNIEN ET SES GÉNÉRALISATIONS

VOL. VIII - FASCICULE 1 - 1959

PARIS

11, Rue Pierre-Curie

BLICATIONS DE L'INSTITUT DE STATISTIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MÉMOIRES ET CONFÉRENCES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS, LA STATISTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, L'ÉCONOMÉTRIE

Jean GEFFROY

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES

(Deuxième partie)

G. MALECOT

LE PROBLÈME DU MOUVEMENT BROWNIEN ET SES GÉNÉRALISATIONS

VOL. VIII - FASCICULE 1 - 1959

PARIS

11, Rue Pierre-Curie

Toute la correspondance relative aux publications
doit être envoyée à l'adresse
INSTITUT DE STATISTIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
Institut Henri Poincaré - 11, Rue Pierre Curie - Paris (5e)

Les manuscrits doivent être envoyés à M. Daniel DUGUE
à l'adresse précédente.

CHAPITRE V

QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LA NOTION D'INDÉPENDANCE LIMITE DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES, APPLICATION A L'ÉTUDE DE LA STABILITÉ DU MILIEU ET DE L'ÉTENDUE D'UN ÉCHANTILLON

A - INDEPENDANCE LIMITE D'UN COUPLE ALEATOIRE -

I - PRELIMINAIRES -

Il est bien connu que si deux variables aléatoires X_n et Y_n sont stables suivant le mode $\mathcal{M}$ (en probabilité, presque sûrement, presque complètement) leur somme est stable suivant le même mode. Nous avons rappelé (cf. th. 19 & 36) dans le cas de la stabilité en probabilité et de la stabilité p. co. que la réciproque est exacte si X_n et Y_n sont indépendantes.

Cette hypothèse d'indépendance jouait un très grand rôle dans nos deux démonstrations. Malheureusement, les valeurs extrêmes d'un échantillon ne sont jamais indépendantes, et les deux théorèmes précédents ne peuvent ainsi s'appliquer à l'étude de la stabilité du milieu ou de l'étendue d'un échantillon. Le problème s'est donc posé d'assouplir la condition d'indépendance, et en particulier, de lui substituer une condition d'indépendance limite.

Il nous a semblé que ce terme d'"indépendance limite", bien qu'assez souvent employé, n'avait pas un sens clairement explicité et même, qu'il avait des sens différents suivant les auteurs. De toute façon, afin de démontrer certaines propositions, nous avons été obligé d'introduire des modes d'indépendance limite non classiques. Nous en indiquons trois dans ce chapitre, mais il est évident que l'on peut en imaginer bien d'autres : le tout est de savoir si les définitions adoptées sont vraiment utiles et efficaces.

II - DISTANCE DE DEUX LOIS DE PROBABILITE A DEUX VARIABLES -

Nos définitions de l'indépendance limite reposent sur la notion de distance entre deux lois de probabilité, ce qui est tout naturel puisque cette notion permet d'exprimer que deux lois sont "très voisines", ou "aussi voisines qu'on le veut".

On sait qu'il existe de multiples façons de définir la distance δ de deux répartitions, cette distance étant telle que la convergence en loi d'une f. d. r. F_n vers une autre F soit caractérisée par :

$$\delta(F, F_n) \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

Nous emploierons ici l'analogue, pour des lois à deux variables de la distance définie par M. Paul Lévy dans le cas des lois à une seule variable. Voici quelques indications sur cette norme.

1/ - Soit $z = F(x, y)$ la surface de répartition d'une certaine loi à deux variables X, Y. En la complétant éventuellement par des portions de plans parallèles à zOx ou zOy, on obtient une surface continue S_F.

Considérons alors deux surfaces S_F et $S_{F'}$. Une droite d'équations :

$$z = -x + a \; ; \qquad z = -y + b$$

les coupe respectivement en deux points M et M'. La longueur du segment MM', comprise entre 0 et $\sqrt{3}$, varie continûment avec a et b; son maximum sera, par définition, la distance des deux lois F et F'.

$$\delta(F, F') = \text{Max.} (MM')$$

2/ - $\delta(F, F')$ possède les deux propriétés suivantes :

a) La relation :

$$F_n(x, y) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} F(x, y)$$

équivaut à : $\delta(F, F_n) \longrightarrow 0$

b) L'inégalité :

$$\delta < \varepsilon \sqrt{3} \qquad (1)$$

entraîne :

$$F(x - \varepsilon, y - \varepsilon) - \varepsilon < F_n(x, y) < F(x + \varepsilon, y + \varepsilon) + \varepsilon \qquad (2)$$

quels que soient x et y.

Réciproquement, si les inégalités (2) sont vraies quels que soient x et y, on a :

$$\delta < \varepsilon \sqrt{3}$$

III - INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE GLOBALE -

1/ - Définition.

Soit $F_n(x, y)$ la f. d. r. d'un couple (X_n, Y_n) ; $A_n(x)$ la f. d. r. marginale de X_n et $B_n(y)$ la f. d. r. marginale de Y_n. Nous dirons que X_n et Y_n sont asymptotiquement globalement indépendantes si $\delta[F_n, A_nB_n]$ tend vers 0 avec $1/n$.

Observons que, si X_n et Y_n sont actuellement indépendantes, on a :

$$F_n(x, y) = A_n(x)\, B_n(y)$$

et par suite : $\delta\,[F_n, A_nB_n] = 0$

Exemple :

Si X_n et Y_n tendent vers 0 en probabilité, elles sont asymptotiquement globalement indépendantes.

2/ - La définition la plus répandue de l'indépendance limite est celle qui correspond au cas où $F_n(x, y) \xrightarrow[\mathcal{C}]{} \mathcal{F}(x, y)$, les variables X et Y de loi $\mathcal{F}$ étant indépendantes ($\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{A}(x)\, \mathcal{B}(y)$). Nous allons montrer que notre définition contient cette définition usuelle.

THEOREME 56 -

Si $F_n(x, y) \xrightarrow[\mathcal{C}]{} \mathcal{F}(x, y) = \mathcal{A}(x)\, \mathcal{B}(y)$, X_n et Y_n sont asymptotiquement globalement indépendantes.

Démonstration.

Puisque $\delta(F_n, \mathcal{F}) \longrightarrow 0$, on peut écrire, pour $n > n_\varepsilon$, et quels que soient x et y :

$$\mathcal{F}(x - \varepsilon, y - \varepsilon) - \varepsilon < F_n(x, y) < \mathcal{F}(x + \varepsilon, y + \varepsilon) + \varepsilon$$

On en déduit :

$$\mathcal{F}(x - \varepsilon, +\infty) - \varepsilon < F_n(x, +\infty) < \mathcal{F}(x + \varepsilon, +\infty) + \varepsilon$$

et $$\mathcal{F}(+\infty, y - \varepsilon) - \varepsilon < F_n(+\infty, y) < \mathcal{F}(+\infty, y + \varepsilon) + \varepsilon$$

c'est-à-dire : $$\mathcal{A}(x - \varepsilon) - \varepsilon < A_n(x) < \mathcal{A}(x + \varepsilon) + \varepsilon$$

$$\mathcal{B}(y - \varepsilon) - \varepsilon < B_n(y) < \mathcal{B}(y + \varepsilon) + \varepsilon$$

Il en résulte que $\delta(A_n, \mathcal{A}) \longrightarrow 0$ et que $\delta(B_n, \mathcal{B}) \longrightarrow 0$.

Les deux convergences légales de $A_n(x)$ et $B_n(y)$ vers $\mathcal{A}(x)$ et $\mathcal{B}(y)$ entraînent la convergence légale de $A_n(x) . B_n(y)$ vers $\mathcal{A}(x) . \mathcal{B}(y)$. On a donc :

$$\delta(\mathcal{A}\mathcal{B}, A_n B_n) \longrightarrow 0$$

Mais, en vertu de l'inégalité triangulaire pour les distances :

$$\delta(F_n, A_n B_n) \leqslant \delta(F_n, \mathcal{A}\mathcal{B}) + \delta(\mathcal{A}\mathcal{B}, A_n B_n)$$

Par conséquent, $\delta(F_n, A_n B_n) \longrightarrow 0$ et ainsi X_n et Y_n sont asymptotiquement globalement indépendantes.

Réciproque.

Si X_n et Y_n sont asymptotiquement globalement indépendantes, et si :

$$F_n(x, y) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \mathcal{F}(x, y)$$

on a nécessairement :

$$\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{A}(x) . \mathcal{B}(y)$$

Cela résulte des trois relations :

$$\delta(\mathcal{A}\mathcal{B}, A_n B_n) \longrightarrow 0$$

$$\delta(\mathcal{F}, F_n) \longrightarrow 0 \quad ; \quad \delta(F_n, A_n B_n) \longrightarrow 0$$

et de l'inégalité triangulaire.

3/ - THEOREME 57 -

Etant donné deux v.a. X_n et Y_n asymptotiquement globalement indépendantes, pour que $X_n + Y_n$ soit stable en probabilité, il faut et il suffit que X_n et Y_n le soient.

Démonstration.

La condition est suffisante. Montrons qu'elle est aussi nécessaire. La somme $Z_n = X_n + Y_n$ étant stable, si l'une des variables X_n, Y_n est stable, l'autre l'est également.

Supposons donc que Z_n soit stable, et montrons que X_n ne peut être instable.

D'après le théorème 17, si X_n est instable il existe un nombre $d > 0$ et une suite infinie ξ_n(définie pour des valeurs de n formant une suite $\mathfrak{N}$) tels que :

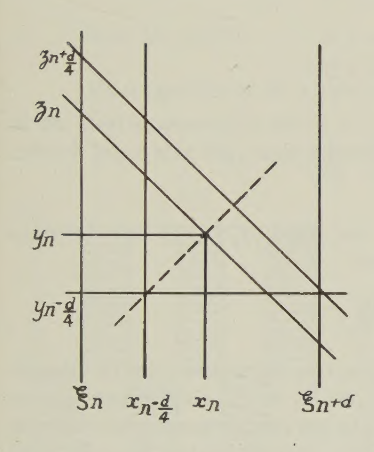
$$A_n(\xi_n) \geqslant \alpha > 0 \quad ; \qquad 1 - A_n(\xi_n + d) \geqslant \beta > 0$$

où α et β sont deux constantes.

D'autre part, puisque Z_n est stable, il existe une suite z_n telle que, pour n assez grand :

$$\Pr\{ z_n \leqslant X_n + Y_n \ll z_n + \frac{d}{4} \} > 1 - \varepsilon$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit.



Considérons alors dans le plan (X_n, Y_n) le point de coordonnées :

$$x_n = \xi_n + \frac{d}{2} \;; \quad y_n = z_n - (\xi_n + \frac{d}{2})$$

On a : $\qquad F_n(x_n, y_n) < \varepsilon$

$$A_n(x_n - \frac{d}{4}) \geqslant \alpha$$

$$B_n(y_n - \frac{d}{4}) > 1 - A_n(\xi_n + d) - \varepsilon \geqslant \beta - \varepsilon$$

Donc, pour tout $\eta > 0$ tel que $\eta < \frac{d}{4}$

$$A_n(x_n - \eta) \geqslant \alpha \quad ; B_n(y_n - \eta) > \beta - \varepsilon$$

D'où :

$$A_n(x_n - \eta)\, B_n(y_n - \eta) > \alpha\beta - \varepsilon$$

et

$$A_n(x_n - \eta)\, B_n(y_n - \eta) > \alpha\beta - \varepsilon - \eta$$

Mais on peut toujours choisir ε et η assez petits pour que :

$$\alpha\beta - \varepsilon - \eta > \varepsilon \;.$$

On aurait alors, pour des valeurs de n suffisamment grandes appartenant à $\mathfrak{N}$:

$$A_n(x_n - \eta)\, B_n(y_n - \eta) - \eta > F_n(x_n, y_n)$$

ce qui est incompatible avec l'indépendance asymptotique globale de X_n et Y_n. Il est donc bien impossible que X_n ne soit pas stable.

IV - INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE GLOBALE FORTE -

1/ - Dans notre note aux C. R. du 14 Octobre 1957, nous avons défini un mode d'indépendance limite globale, que nous appellerons ici "forte", et qui correspond à la convergence légale uniforme.

<u>Définition.</u>

X_n et Y_n tendent à devenir globalement fortement indépendantes si :

$$F_n(x, y) - A_n(x)\, B_n(y) \longrightarrow 0 \quad \text{uniformément avec } 1/n.$$

En choisissant comme distance $d(F, F')$ l'expression :

$$d = \underset{(x,y)}{\operatorname{Max}} \left| F(x, y) - F'(x, y) \right| ,$$

la condition précédente s'écrit :

$$d(F_n , A_n B_n) \longrightarrow 0 \quad \text{avec } 1/n$$

On verrait aisément que si $F_n(x, y)$ a une limite continue de la forme $\mathcal{A}(x)\, \mathcal{B}(y)$, X_n et Y_n sont asymptotiquement globalement fortement indépendantes.

2/ - Considérons une application du plan (x_n , y_n) sur le plan (x'_n, y'_n) définie par :

$$x'_n = \varphi_n(x_n) \quad ; \quad y'_n = \psi_n(y_n)$$

où φ_n et ψ_n sont monotones (une telle application sera dite de la classe $\mathcal{A}$). L'indépendance as. globale (faible) de X_n et Y_n n'entraîne pas en général celle de X'_n et de Y'_n. On constate cela en remarquant que, quelle que soit la distribution du couple (X', Y'), les variables $X_n = X'/n$ et $Y_n = Y'/n$ sont as. glob. ind. Par contre, il est évident que l'indépendance asymptotique globale forte est conservée pour tout système d'applications de la classe $\mathcal{A}$. Donc, s'il existe un tel système d'applications conduisant à une loi limite pour le couple (x'_n, y'_n), cette loi correspond nécessairement à deux variables x', y', qui sont indépendantes

$$F_{X'_n, Y'_n}(x', y') \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \Theta(x', y') = \Theta_1(x')\, \Theta_2(y')$$

Il est d'ailleurs clair que l'existence d'une loi limite pour chacune des variables X'_n et Y'_n entraînera l'existence d'une loi limite pour le couple (X'_n, Y'_n), cette dernière loi étant de la forme indiquée.

3/ - Critique de la notion d'indépendance limite globale.

Dire que Y_n est indépendant de X_n, c'est dire que la loi de Y_n est indépendante de toute information sur X_n. En particulier, on doit avoir :

$$\Pr \{ Y_n < y / X_n = x \} = \Pr \{ Y_n < y \}$$

relation qui, d'ailleurs exprime complètement l'indépendance de Y_n vis-à-vis de X_n.

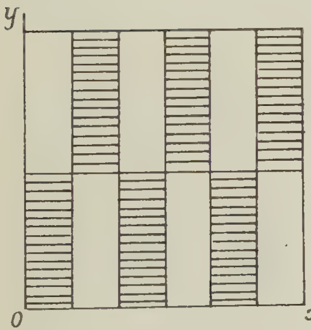
Il semblerait donc logique de dire que, si Y_n est as. indépendant de X_n, la loi de Y_n liée par $X_n = x$ diffère peu (le sens de cette expression étant fixé quand on a choisi une distance entre deux lois) de la loi marginale de Y_n pour n assez grand.

Or, cela n'a pas toujours lieu dans le cas de l'indépendance as. globale (forte ou faible). Nous allons le montrer sur un exemple.

Soit le carré : $0 \leqslant x \leqslant 1 \quad ; \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

Partageons-le en 4 n rectangles égaux, délimités par les droites :

$$x = 0, \frac{1}{2n}, \frac{2}{2n}, \ldots 1 \quad ; \quad y = 0, \frac{1}{2}, 1 .$$



Choisissons 2 n d'entre eux en prenant, dans la bande $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$, les rectangles de rang impair, et dans la bande $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$ les rectangles de rang pair. Dans le domaine ainsi obtenu, répartissons uniformément la probabilité unité. Il correspond à cette répartition une loi de probabilité pour le couple (X_n, Y_n) que nous appellerons $F_n(x, y)$.

Les lois marginales de X_n et de Y_n sont uniformes entre 0 et 1. Si k/n est la valeur approchée de x à 1/n près par défaut, on a toujours :

$$\frac{k}{n} y \leqslant F(x, y) < \frac{k+1}{n} y$$

En comparant ces inégalités à :

$$\frac{k}{n} \leqslant x < \frac{k+1}{n}$$

on obtient :

$$| F_n(x, y) - xy | < \frac{y}{n} \leqslant 1/n$$

Donc, $F_n(x, y)$ tend uniformément vers xy : il y a indépendance globale forte de X_n et Y_n.

D'autre part, la loi de Y_n liée par $X_n = x$ est uniforme entre 0 et 1/2 pour un ensemble de valeurs de x de probabilité 1/2 ; elle est uniforme entre 1/2 et 1 pour un ensemble de valeurs de x de probabilité 1/2.

Ainsi, le fait que nous signalions plus haut apparaît ici. Il est légitime d'en conclure à l'opportunité d'une définition de l'indépendance limite qui soit plus en accord avec le concept habituel d'indépendance que ne l'est l'indépendance asymptotique globale.

V - INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE STRICTE EN PROBABILITE -

1/ - Définition.

On dit que Y_n est asymptotiquement strictement indépendant de X_n en probabilité si la distance $\delta(x_n)$ entre la loi marginale de Y_n et la loi de Y_n liée par $X_n = x_n$ tend vers 0 en probabilité.

En d'autres termes, si l'on appelle E_n l'ensemble des valeurs de x_n telles que $\delta(x_n) < \varepsilon$, on a :

$$\Pr\{X_n \in E_n\} \longrightarrow 1 \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty \quad \text{quel que soit } \varepsilon > 0.$$

2/ - THEOREME 58 -

L'indépendance as. stricte en probabilité de Y_n vis-à-vis de X_n entraîne l'indépendance as. globale de X_n et Y_n.

Démonstration.

Soit $B_n(y)$ la loi marginale de Y_n, et $B_n(y; x)$ sa loi liée par $X_n = x$. Y_n étant strictement ind. de X_n en probabilité, à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un entier n_ε tel que, en appelant E_n l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles :

$$\delta\,[B_n(y; x),\ B_n(y)] < \varepsilon$$

on ait : $$\Pr\{X_n \in E_n\} > 1 - \varepsilon \qquad \text{quand } n > n_\varepsilon$$

Désignons par R l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, R_x l'intervalle $]-\infty, x[$ et posons :

$$E'_n = R - E_n \quad ; \quad \mathcal{E}_n = E_n \cap R_x \quad ; \quad \mathcal{E}'_n = E'_n \cap R_x$$

Sur $\mathcal{E}_n$ on a :

$$B_n(y - \varepsilon) - \varepsilon < B_n(y;\ x) < B_n(y + \varepsilon) + \varepsilon \quad \text{pour } n > n_\varepsilon$$

Donc :

$$\int_{\mathcal{E}_n} [B_n(y - \varepsilon) - \varepsilon]\, dA_n(x) < \int_{\mathcal{E}_n} B_n(y;\ x)\, dA_n(x)$$

$$< \int_{\mathcal{E}_n} [B_n(y + \varepsilon) + \varepsilon]\, dA_n(x)$$

D'autre part :

$$\int_{\mathcal{E}'_n} [B_n(y - \varepsilon) - \varepsilon]\, dA_n(x) < \int_{\mathcal{E}'_n} dA_n(x) < \varepsilon$$

$$0 < \int_{\mathcal{E}'_n} B_n(y;\ x)\, dA_n(x) < \varepsilon \ ; \ 0 < \int_{\mathcal{E}'_n} [B_n(y + \varepsilon) + \varepsilon]\, dA_n(x)$$

On en déduit, en remarquant que $\mathcal{E}_n + \mathcal{E}'_n = R_x$

$$\int_{-\infty}^{x} [B_n(y - \varepsilon) - \varepsilon]\, dA_n(x) - \varepsilon < \int_{-\infty}^{x} B_n(y;\ x)\, dA_n(x)$$

$$< \int_{-\infty}^{x} [B_n(y + \varepsilon) + \varepsilon]\, dA_n(x) + \varepsilon$$

Soit :

$$A_n(x)\,[B_n(y - \varepsilon) - \varepsilon] - \varepsilon < F_n(x,\ y) < A_n(x)\,[B_n(y + \varepsilon) + \varepsilon] + \varepsilon$$

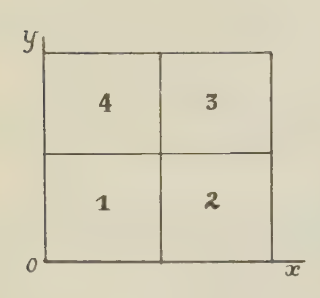
et à fortiori :

$$A_n(x - \varepsilon)\, B_n(y - \varepsilon) - 2\varepsilon < F_n(x,\ y) < A_n(x + \varepsilon)\, B_n(y + \varepsilon) + 2\varepsilon$$

Cette double inégalité, vraie pour $n > n_\varepsilon$ quels que soient x et y, prouve que X_n et Y_n sont as. glob. indépendantes.

3/ - La réciproque du théorème précédent est inexacte: X_n et Y_n peuvent être as. glob. ind. sans qu'aucune de ces deux variables soit strictement indépendante de l'autre en probabilité.

Nous vérifierons cela sur un exemple. Partageons le carré : $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ en quatre carrés égaux numérotés de 1 à 4 (voir figure). Dans chacun des carrés 2 et 4, répartissons uniformément une probabilité égale à 1/4. Dans le carré 1, répartissons la probabilité 1/4 de la même façon que nous avons réparti la probabilité unité dans l'exemple du § IV. Dans le carré 3, nous plaçons enfin la répartition déduite de celle du carré 1 par une rotation de $\frac{\pi}{2}$.



Considérons le couple (X_n, Y_n) associé à la répartition totale obtenue. On a :

$$A_n(x) = x \ ; \quad B_n(y) = y \ ; \quad F_n(x, y) \xrightarrow[u]{} xy$$

Il y a donc bien ind. as. globale (forte) de X_n et Y_n. Cependant on voit immédiatement que Y_n (resp. X_n) n'est pas as. strictement ind. de X_n (resp. Y_n) en probabilité.

4/ - La notion d'indépendance asymptotique stricte en probabilité n'est pas réciproque. Ce fait est en évidence dans l'exemple du § IV, où Y_n n'est pas strictement ind. de X_n en probabilité, tandis que X_n est strictement de Y_n en probabilité.

Il n'y a là aucun paradoxe ; cela résulte simplement de ce que la Topologie de la convergence faible ne permet pas d'apprécier certaines "modifications" d'une loi de probabilité ; elle n'est pas assez fine.

Montrons-le sur un exemple extrême. Partageons le segment (0, 1) en 2n intervalles égaux $I_j (j = 1, 2, \dots n)$. Soit Λ_n^1 la loi correspondant à une répartition uniforme sur l'ensemble des intervalles de rang impair I_{2k+1}, et Λ_n^2 la loi correspondant à une répartition uniforme sur l'ensemble des intervalles de rang pair I_{2k}. Considérons alors le couple (X_n, Y_n) défini comme suit :

$$\begin{cases} \Pr\{Y_n = 0\} = 1/2 \ ; & \text{loi de } X_n \text{ liée par } Y_n = 0 : \ \Lambda_n^1 \\ \Pr\{Y_n = 1\} = 1/2 \ ; & \text{loi de } X_n \text{ liée par } Y_n = 1 : \ \Lambda_n^2 \end{cases}$$

Y_n est lié fonctionnellement à X_n, puisque $Y_n = 0$ si $x_n \in I_{2k}$ et $Y_n = 1$ si $x_n \in I_{2k+1}$. D'autre part, les deux lois liées de X_n peuvent être rendues arbitrairement voisines en choisissant n assez grand : X_n est asymptotiquement strictement indépendant de Y_n en probabilité.

Remarque.

Pour analyser plus profondément les liaisons stochastiques, on pourrait songer à utiliser comme distance de deux mesures de probabilité μ_1, μ_2 d'un espace X (éléments d'une classe de mesures $\mathcal{M}$ définies sur un σ-corps $\mathcal{S}$) l'expression :

$$\delta(\mu_1, \mu_2) = \operatorname*{Max}_E [\mu_1(E) - \mu_2(E)]$$

où E est un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{S}$. Cette distance prend sa valeur maximum $\delta = 1$ si les répartitions sont disjointes, c'est-à-dire s'il existe un $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$ tel que :

$$\mu_1 (\mathcal{E}) = 1 \;;\; \mu_2 (\mathcal{E}) = 0$$

Dans l'exemple cité plus haut, Λ_n^1 et Λ_n^2 ne sont plus arbitrairement voisines, mais au contraire :

$$\delta (\Lambda_n^1, \Lambda_n^2) = 1$$

4/ - THEOREME 59 -

Soit deux v.a. X_n, Y_n, telles que Y_n soit as. str. ind. de X_n en probabilité. Pour que la somme $Z_n = X_n + Y_n$ soit stable, il faut et il suffit que X_n et Y_n le soient.

Démonstration.

C'est une conséquence immédiate des théorèmes 58 & 57, mais il est intéressant d'établir ce théorème par une méthode directe ; nous verrons ainsi que l'indépendance stricte est plus facile à utiliser que l'indépendance globale.

La condition donnée est évidemment suffisante ; montrons qu'elle est nécessaire. Z_n étant supposé stable, si Y_n est stable il en va de même pour X_n. Supposons maintenant Y_n instable. Dans ce cas il existe une suite infinie $\mathcal{N}$ et deux constantes positives l et k telles que :

$$\Pr \{ | Y_n + a | > l \} > k$$

quel que soit a, pour $n \in \mathcal{N}$

Puisque la distance entre la loi marginale de Y_n et sa loi liée par $X_n = x_n$ peut être rendue arbitrairement petite pour un ensemble de valeurs de x_n dont la probabilité est arbitrairement voisine de 1, à condition de choisir n assez grand, nous aurons la relation :

$$\Pr \{ | Y_n + a | > \frac{l}{2} / X_n = x_n \} > \frac{k}{2}$$

quel que soit a, pour $n \in \mathcal{N}$ et $n > n_o$, et pour un ensemble E_n de valeurs de x_n de probabilité supérieure à 1/2. On peut alors écrire :

$$\Pr \{ | X_n + Y_n + a | > \frac{l}{2} / X_n \in E_n \} > \frac{k}{2}$$

Or :

$$\Pr \{ | Z_n + a | > \frac{l}{2} \} \geqslant \Pr \{ X_n \in E_n \} \Pr \{ | Z_n + a | > \frac{l}{2} / X_n \in E_n \}$$

On en déduit :

$$\Pr \{ | Z_n + a | > \frac{l}{2} \} \geqslant \frac{k}{4}$$

quel que soit a, pour $n > n_0$ et $n \in \mathfrak{N}$, ce qui implique l'instabilité de Z_n. Il est donc impossible que Y_n soit instable. C.Q.F.D.

VI - INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE STRICTE PRESQUE COMPLETE -

1/ - Définition.

On dit que Y_n est asymptotiquement strictement indépendant de X_n presque complètement si la distance $\delta(x_n)$ entre la loi marginale de Y_n et la loi de Y_n liée par $X_n = x_n$ tend vers 0 presque complètement.

En d'autres termes, si l'on appelle E_n l'ensemble des valeurs de x_n telles que $\delta(x_n) < \varepsilon$, on a :

$$\sum_1^\infty \Pr\{X_n \notin E_n\} < \infty$$

aussi petit que soit $\varepsilon > 0$.

Exemple.

Si nous reprenons l'exemple donné au n°IV, 3, nous voyons que :

$$|A_n(x;\, y) - A_n(x)| < 1/n \qquad \text{quel que soit } y.$$

X_n est donc str. ind. de Y_n presque complètement.

2/ - Il est clair que l'indépendance stricte p.co. de Y_n vis-à-vis de X_n entraîne l'indépendance stricte en probabilité de Y_n vis-à-vis de X_n, et l'indépendance globale de ces deux variables.

3/ - THEOREME 60 -

Considérons deux v.a. X_n, Y_n telles que Y_n soit asymptotiquement strictement indépendant de X_n presque complètement. Pour que la somme $Z_n = X_n + Y_n$ soit stable p.co., il faut et il suffit que X_n et Y_n le soient.

Démonstration.

Nous savons déjà que la condition est suffisante. Pour établir qu'elle est nécessaire, remarquons d'abord que, si Z_n est stable p.co. elle est à fortiori stable en probabilité ; vu l'indépendance asymptotique de X_n et Y_n, cela implique la stabilité en probabilité de X_n et de Y_n.

En retranchant de X_n et de Y_n des constantes convenablement choisies, nous pouvons donc supposer que ces deux variables tendent vers 0 en probabilité, et par suite que Z_n tend vers 0 presque complètement.

Dans ces conditions, la stabilité p. co. de X_n entraînerait celle de Y_n. Il nous reste à examiner le cas où X_n n'est pas stable p. co.

Cette propriété de X_n équivaut à l'existence d'un nombre $l > 0$ tel que, en posant :

$$\mathcal{E} = \mathcal{R} - [-l, +l]$$

et :

$$\alpha_n = \Pr\{X_n \in \mathcal{E}\}, \quad \text{on ait :} \quad \sum_1^\infty \alpha_n = +\infty$$

Appelons $\mathcal{I}$ l'intervalle $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$. Puisque $Y_n \xrightarrow[p]{} 0$, on a :

$$\Pr\{Y_n \in \mathcal{I}\} \longrightarrow 1$$

Il existe alors un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, si la distance δ d'une loi L à la loi marginale de Y_n est au plus égale à ε, on puisse écrire :

$$\Pr\{Y \in \mathcal{I}\} > \frac{1}{2}, \quad Y \text{ étant une variable de loi L.}$$

Mais d'après l'indépendance stricte p. co. de Y_n par rapport à X_n, si E_n est l'ensemble des valeurs de x_n pour lesquelles :

$$\delta[B_n(y), B_n(y; x_n)] \leqslant \varepsilon$$

la série de terme général :

$$u_n = 1 - \Pr\{X_n \in E_n\} \quad \text{est convergente.}$$

On a alors :

$$\Pr\{Y_n \in \mathcal{I} / X_n = x_n\} > \frac{1}{2} \qquad \text{pour } x_n \in E_n$$

et par suite :

$$\Pr\{Y_n \in \mathcal{I} / X_n \in \mathcal{E} \cap E_n\} > \frac{1}{2}$$

Or :

$$\Pr\{X_n \in \mathcal{E} \cap E_n\} > \alpha_n - u_n$$

D'où :

$$\Pr\{X_n \in \mathcal{E}, Y_n \in \mathcal{E}\} > \Pr\{X_n \in \mathcal{E} \cap E_n, Y_n \in \mathcal{I}\} > \frac{1}{2}(\alpha_n - u_n)$$

La série (α_n) étant divergente et la série (u_n) convergente, on a :

$$\sum_1^\infty \Pr\{X_n \in \mathcal{E}, Y_n \in \mathcal{I}\} = +\infty$$

Il est clair que l'évènement :

$$X_n \subset \mathcal{E}, \quad Y_n \subset \mathcal{J}$$

entraîne $$| Z_n | > \frac{1}{2}.$$

Finalement, on a donc :

$$\sum_{1}^{\infty} \Pr \{ | Z_n | > \frac{1}{2} \} = +\infty ,$$

c'est-à-dire que Z_n ne converge pas presque complètement vers 0. Dès lors il est impossible que X_n ne soit pas stable p. co. C. Q. F. D.

4/ - Remarque.

La condition d'indépendance as. stricte p. co. qui figure dans le théorème précédent étant très forte, on pourrait se demander s'il n'y a pas moyen de lui substituer une condition moins exigeante. Nous sommes en mesure de fournir une réponse positive à cette question. Cependant :

a) Il est impossible de beaucoup assouplir la condition visée. Par exemple, l'indépendance as. stricte en probabilité ne serait pas assez forte. Nous le constaterons facilement en prenant pour loi du couple (X_n, Y_n) la masse $(n - 1)/n$ placée à l'origine et la masse $1/n$ au point $x = 1$, $y = - 1$. On a : $X_n + Y_n = 0$, ce qui entraîne à fortiori : $X_n + Y_n \xrightarrow[p.co.]{} 0$. Y_n (resp. X_n) est as. str. ind. de X_n (resp. Y_n) en probabilité, et tend vers 0 en probabilité. Cependant, ni X_n ni Y_n ne tendent vers 0 p. co. puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

b) Il semble difficile d'obtenir une condition intermédiaire entre l'ind. as. stricte p. co. et l'ind. as. stricte en probabilité qui soit simple et naturelle.

B - APPLICATION A LA THEORIE DES VALEURS EXTREMES -

VII - ETUDE DE LA LIAISON STOCHASTIQUE DE Y_n ET Z_n -

1/ - Etude qualitative.

Soit $F_n(y)$ la f. d. r. de Y_n, et $F_n(y; z)$ la f. d. r. de Y_n connaissant $Z_n = z$. Nous allons d'abord examiner la position de la courbe $\eta(y) = F_n(y; z)$ par rapport à la courbe $\eta(y) = F_n(y)$.

La f. d. r. $F_n(y; z)$ est définie par :

$$\begin{cases} F_n(y;\ z) = 0 \quad \text{si } y < z \\ F_n(y;\ z) = \left[\dfrac{F(y) - F(z)}{1 - F(z)}\right]^{n-1} \quad \text{si } y \geq z \end{cases}$$

Si les deux courbes envisagées sont discontinues, nous les complèterons par des segments verticaux de façon à obtenir des courbes continues. Il est clair que, au voisinage de la valeur $y = z$, on a : $F_n(y) > F_n(y;\ z)$. Pour que les deux courbes se traversent, il faut et il suffit qu'il existe des valeurs de y telles que : $F_n(y) < F_n(y;\ z)$. Posons alors :

$$F(y) = a \quad ; \quad F(z) = b \qquad (0 \leqslant b \leqslant a \leqslant 1)$$

b étant fixé, il s'agit de voir s'il existe des valeurs de a pour lesquelles :

$$\left(\frac{a - b}{1 - b}\right)^{n-1} > a^n$$

Quand a est voisin de b, on a :

$$\left(\frac{a - b}{1 - b}\right)^{n-1} < a^n$$

Comme les deux fonctions a^n et $\left(\frac{a - b}{1 - b}\right)^{n-1}$ sont continues par rapport à a, l'équation :

$$a^n = \left(\frac{a - b}{1 - b}\right)^{n-1} \qquad (1)$$

admet dans ce cas au moins une racine. Or, cette équation se résoud aisément en b :

$$b = \frac{a - a^{\frac{n}{n-1}}}{1 - a^{\frac{n}{n-1}}}$$

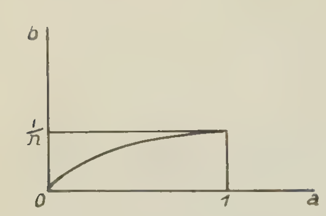
valeur qui vérifie bien la condition $0 \leqslant b \leqslant a$

Etudions les variations de b en fonction de a.

Pour $a = 0$, $b = 0$, et $b/a \longrightarrow 1$ quand $a \longrightarrow 0$.

Quand $a \longrightarrow 1$, $b \longrightarrow 1/n$, et $\frac{db}{da} \longrightarrow 1/2n$.

On voit aisément que $\frac{db}{da}$ est > 0 pour $a \in (0, 1)$, donc b(a) est croissante dans cet intervalle. La discussion de l'équation (1) est immédiate



sur le graphique de b(a) :

- si $b \geqslant 1/n$: 0 solution

On a toujours $F_n(y;\ z) < F_n(y)$

- si $b < 1/n$: 1 solution

Les deux courbes se traversent une seule fois. Pour y assez grand, on a :

$$F_n(y;\ z) > F_n(y)$$

2/ - THEOREME 61 -

La distance $d_n(z)$ entre les deux lois $F_n(y)$ et $F_n(y;\ z)$ définie par :

$$d_n(z) = \underset{(y)}{\text{Max}} \{ \mid F_n(y) - F_n(y;\ z) \mid \}$$

vérifie l'inégalité :

$$d_n(z) < \text{Sup} \left\{ \frac{1}{n},\ \frac{F(z)}{1 - F(z)} \right\}$$

Compte tenu du fait que $Z_n \xrightarrow[p.co.]{} -\infty$, on en déduit que $d_n(Z_n) \xrightarrow[p.co.]{} 0$, c'est-à-dire que Y_n est asymptotiquement strictement indépendant de Z_n presque complètement.

Démonstration.

Posons :

$$\Delta(y) = F_n(y) - F_n(y;\ z) = F^n(y) - \left[\frac{F(y) - F(z)}{1 - F(z)}\right]^{n-1}$$

L'ensemble des valeurs prises par $\Delta(y)$ quand y varie de $-\infty$ à $+\infty$ est contenu dans l'ensemble des valeurs que prend la fonction

$$D(a) = a^n - \left(\frac{a - b}{1 - b}\right)^{n-1} \qquad \text{pour} \quad b \leqslant a \leqslant 1$$

Donc :

$$\underset{(y)}{\text{Max}} \{ \Delta(y) \} \leqslant \underset{b \leqslant a \leqslant 1}{\text{Max}} \{ D(a) \}$$

et :

$$\underset{(y)}{\text{Min}} \{ \Delta(y) \} \geqslant \underset{b \leqslant a \leqslant 1}{\text{Min}} \{ D(a) \}$$

On peut écrire :

$$D(a) < a^n - \left(\frac{a - b}{1 - b}\right)^n < \frac{a^n}{1 - b} - \left(\frac{a - b}{1 - b}\right)^n = \overline{D}(a)$$

La fonction $\overline{D}(a)$ est monotone croissante sur le segment (0, 1) car sa dérivée :

$$\overline{D}'(a) = \frac{n}{1-b} \; a^{n-1} - \left(\frac{a-b}{1-b}\right)^{n-1}$$

s'annule pour a = 1, et est positive quand 0 < a < 1. Par suite :

$$\text{Max} \{ \overline{D}(a) \} = \overline{D}(1) = \frac{b}{1-b}$$

Finalement :

$$\underset{(y)}{\text{Max}} \{ \Delta (y) \} < \frac{b}{1-b} = \frac{F(z)}{1-F(z)} \qquad (1)$$

D'autre part, en vertu de l'inégalité : $a > \dfrac{a-b}{1-b}$, on a :

$$D(a) > a^n - a^{n-1}$$

Mais l'on voit immédiatement que le minimum de $a^n - a^{n-1}$ sur le segment (0, 1) est égal à $-\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-1}$ quantité qui est minorée par $\frac{1}{n}$.

Donc :

$$\underset{(y)}{\text{Min}} \{ \Delta (y) \} > -1/n \qquad (2)$$

En rapprochant les inégalités (1) et (2), on obtient bien le résultat annoncé.

Remarque.

Bien entendu, Z_n possède la même propriété d'indépendance limite vis-à-vis de Y_n.

VIII - INDEPENDANCE LIMITE DE Y_n^α ET Z_n^β -

THEOREME 62 -

Soit Y_n^α et Z_n^β les valeurs d'un échantillon de rang α à partir de la droite et β à partir de la gauche, $F_{n,\alpha}(y)$ la f. d. r. marginale de Y_n^α et $F_{n,\alpha}(y;\ z)$ la f. d. r. de Y_n^α liée par $Z_n^\beta = z$. La distance :

$$d_n(z) = \underset{(y)}{\text{Max}} \{ \mid F_{n,\alpha}(y) - F_{n,\alpha}(y;\ z) \mid \}$$

vérifie l'inégalité :

$$d_n(z) < \left(\frac{n}{n-\alpha-\beta}\right)^\alpha + \frac{1}{[1-F(z)]^\alpha} - 2$$

Par suite, $d_n(Z_n) \underset{p.co.}{\longrightarrow} 0$ avec 1/n, et ainsi Y_n^α est asymptotiquement indépendant de Z_n^β presque complètement.

Démonstration.

La loi marginale de Y_n^α est :

$$F_{n,\alpha}(y) = \frac{n!}{(n-\alpha)!\,(\alpha-1)!} \int_0^{F(y)} t^{n-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}\,dt$$

Si l'on connait $Z_n^\beta = z$, Y_n^α se présente comme la valeur de rang α (à partir de la droite) d'un échantillon de taille $n-\beta$, dont la loi est égale à $\dfrac{F(y)-F(z)}{1-F(z)}$ pour $y \geqslant z$, et à 0 pour $y < z$. La f. d. r. de Y_n lié par $Z_n = z$ est donc :

$$F_{n,\alpha}(y;\ z) = \frac{(n-\beta)!}{(n-\alpha-\beta)!\,(\alpha-1)!} \int_0^{\frac{F(y)-F(z)}{1-F(z)}} u^{n-\alpha-\beta}\,(1-u)^{\alpha-1}\,du$$

Considérons la différence :

$$\Delta(y) = F_{n,\alpha}(y) - F_{n,\alpha}(y;\ z)$$

Il s'agit de majorer et de minorer $\Delta(y)$ quand y varie de z à $+\infty$. En fait, Δ est une fonction de F(y) définie dans [F(z), 1] . En remplaçant F(y) par un paramètre t qui varie continûment entre F(z) et 1, nous ne pourrons qu'augmenter le maximum des valeurs de $\Delta(y)$ et diminuer leur minimum. Nous désignerons par D(t) la fonction déduite de $\Delta(y)$ par le changement de variable $t = F(y)$. Il sera commode d'introduire la fonction :

$$H_n(t) = \frac{n!\,(n-\alpha-\beta)!}{(n-\alpha)!\,(n-\beta)!}\,F_{n,\alpha}(y;\ z)$$

$$= \frac{n!}{(n-\alpha)!\,(\alpha-1)!} \int_{F(z)}^{t} \left(\frac{t-F(z)}{1-F(z)}\right)^{n-\alpha-\beta} \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{[1-F(z)]^{\alpha}}\,dt$$

On peut écrire :

$$D(t) = [\,F_{n,\alpha}(y) - H_n(t)\,] + [\,H_n(t) - F_{n,\alpha}(y;\ z)\,] .$$

d'où :

$$\text{Max}\ \{\,D(t)\,\} \leqslant \text{Max}\ [\,F_{n,\alpha}(y) - H_n(t)\,] + \text{Max}\ [\,H_n(t) - F_{n,\alpha}(y;\ z)\,]$$

On a d'abord :

$$H_n(t) - F_{n,\alpha}(y;\ z) = \left[\frac{n!\,(n-\alpha-\beta)!}{(n-\alpha)!\,(n-\beta)!} - 1\right] F_{n,\alpha}(y;\ z)$$

Donc :

$$\text{Max}\{\,H_n(t) - F_{n,\alpha}(y;z)\,\} = \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{(n-\beta)(n-\beta-1)\ldots(n-\beta-\alpha+1)} - 1 < \left(\frac{n}{n-\alpha-\beta}\right)^{\alpha} - 1$$

Etudions maintenant $F_{n,\alpha}(y) - H_n(t)$. On a :

$$F_{n,\alpha}(y) < \frac{F_{n,\alpha}(y)}{[1 - F(z)]^\alpha}$$

et :

$$H_n(t) > \frac{n!}{(n-\alpha)!\,(\alpha-1)!} \int_{F(z)}^{t} \left[\frac{t - F(z)}{1 - F(z)}\right]^{n-\alpha} \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{[1 - F(z)]^\alpha}\, dt$$

Par conséquent :

$$F_{n,\alpha}(y) - H_n(t) < \frac{F_{n,\alpha}(y)}{[1 - F(z)]^\alpha} - \frac{n!}{(n-\alpha)!\,(\alpha-1)!} \int_{F(z)}^{t} \left(\frac{t-F(z)}{1-F(z)}\right)^{n-\alpha} \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{[1-F(z)]^\alpha} dt$$

Nous désignerons par $K_n(t)$ le second membre de cette inégalité.

$$K_n'(t) = \frac{n!}{(n-\alpha)!\,(\alpha-1)!} \cdot \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{[1 - F(z)]^\alpha} \left[t^{n-\alpha} - \left(\frac{t - F(z)}{1 - F(z)}\right)^{n-\alpha}\right]$$

Quant t est compris entre 0 et 1, on a constamment $t > \dfrac{t - F(z)}{1 - F(z)}$ ce qui entraîne $K_n'(t) > 0$.

Par suite $K_n(t)$ est croissante dans l'intervalle $(0, 1)$ et l'on a :

$$\text{Max}\{K_n(t)\} = K_n(1)$$

$$= \frac{1}{[1 - F(z)]^\alpha} - \frac{n!}{(n-\alpha)!\,(\alpha-1)!} \int_{F(z)}^{1} \left(\frac{t - F(z)}{1 - F(z)}\right)^{n-\alpha} \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{[1 - F(z)]^\alpha}\, dt$$

Le changement de variable $u = \dfrac{t - F(z)}{1 - F(z)}$ donne :

$$\int_{F(z)}^{1} \left(\frac{t - F(z)}{1 - F(z)}\right)^{n-\alpha} \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{[1 - F(z)]^\alpha}\, dt = \int_0^1 u^{n-\alpha}(1-u)^{\alpha-1}\, du = \frac{(n-\alpha)!\,(\alpha-1)!}{n!}$$

Il en résulte que :

$$\text{Max}\{K_n(t)\} = \frac{1}{[1 - F(z)]^\alpha} - 1$$

Finalement :

$$\text{Max}\{D(t)\} < \left(\frac{n}{n-\alpha-\beta}\right)^\alpha + \frac{1}{[1 - F(z)]^\alpha} - 2$$

Pour minorer D(t), nous partirons de :

$$F_{n,\alpha}(y;\ z) < \frac{n!}{(n-\alpha)!\,(\alpha-1)!}\int_0^{\frac{t-F(z)}{1-F(z)}} u^{n-\alpha-\beta}(1-u)^{\alpha-1}\,du$$

Puisque $t > \dfrac{t-F(z)}{1-F(z)}$, on a aussi :

$$F_{n,\alpha}(y;\ z) < \frac{n!}{(n-\alpha)!\,(\alpha-1)!}\int_0^{t} u^{n-\alpha-\beta}(1-u)^{\alpha-1}\,du$$

On peut alors écrire :

$$D(t) > \frac{n!}{(n-\alpha)!\,(\alpha-1)!}\int_0^{t} t^{n-\alpha-\beta}(1-t)^{\alpha-1}(t^{\beta}-1)\,dt$$

La fonction qui figure sous le signe d'intégration étant négative :

$$\operatorname{Min}\{D(t)\} > \frac{n!}{(n-\alpha)!\,(\alpha-1)!}\int_0^{1} t^{n-\alpha-\beta}(1-t)^{\alpha-1}(t^{\beta}-1)\,dt$$

$$> \frac{n!}{(n-\alpha)!\,(\alpha-1)!}\left[\frac{(n-\alpha)!\,(\alpha-1)!}{n!} - \frac{(n-\alpha-\beta)!\,(\alpha-1)!}{(n-\beta)!}\right]$$

$$= 1 - \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{(n-\beta)(n-\beta-1)\ldots(n-\alpha-\beta+1)}$$

et enfin :

$$\operatorname{Min}\{D(t)\} > 1 - \left(\frac{n}{n-\alpha-\beta}\right)^{\alpha}$$

En résumé, nous avons :

$$1 - \left(\frac{n}{n-\alpha-\beta}\right)^{\alpha} < D(t) < \left[\left(\frac{n}{n-\alpha-\beta}\right)^{\alpha} - 1\right] + \left[\frac{1}{[1-F(z)]^{\alpha}} - 1\right]$$

et, à fortiori, la relation annoncée pour $d_n(z)$.

Remarque.

La double inégalité ci-dessus est encore valable si α et β varient avec n, mais ce n'est que pour des indices $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ convenablement choisis que l'indépendance limite persisterait. Nous n'aborderons pas ce problème ici.

IX - STABILITE EN PROBABILITE DU MILIEU ET DE L'ETENDUE -

THEOREME 63 -

Le milieu M_n d'un échantillon (ou son étendue R_n) est stable en probabilité si et seulement si les deux valeurs extrêmes Y_n et Z_n sont stables en probabilité.

C'est là une conséquence immédiate des théorèmes 59 & 61.

Dans ce cas :

$$Y_n - F^{-1}(1 - \frac{1}{n}) \xrightarrow[p]{} 0 \quad ; \qquad Z_n - F^{-1}(\frac{1}{n}) \xrightarrow[p]{} 0$$

donc :

$$M_n - \frac{1}{2}\,[F^{-1}(1 - \frac{1}{n}) + F^{-1}(\frac{1}{n})] \xrightarrow[p]{} 0$$

Corollaire 63.

Pour que M_n converge en probabilité vers une limite certaine l, il faut et il suffit que Y_n et Z_n soient stables en probabilité, et que l'on ait :

$$\frac{1}{2}\,[F^{-1}(1-\frac{1}{n}) + F^{-1}(\frac{1}{n})] \longrightarrow l \qquad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

Notons d'ailleurs que l'on peut remplacer 1/n par une variable continue h qui tend vers 0.

THEOREME 64 -

La stabilité de l'un des milieux ou pseudo-milieux $M_n^{\alpha,\beta}$ entraîne celle de tous les autres, et de plus :

$$M_n^{\alpha,\beta} - M_n \xrightarrow[p]{} 0$$

Démonstration.

D'après les théorèmes 59 & 62, $M_n^{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}(Y_n^{\alpha} + Z_n^{\beta})$ est stable en probabilité si et seulement si Y_n^{α} et Z_n^{β} le sont. Or, nous savons (th. 26) que la stabilité de Y_n^{α} équivaut à celle de Y_n, et que la stabilité de Z_n^{β} équivaut à celle de Z_n.

Finalement, nous voyons que la stabilité de $M_n^{\alpha,\beta}$ équivaut à celle de M_n. En utilisant les relations :

$$Y_n^{\alpha} - Y_n \xrightarrow[p]{} 0 \quad ; \qquad Z_n^{\beta} - Z_n \xrightarrow[p]{} 0$$

on obtient : $$M_n^{\alpha,\beta} - M_n \xrightarrow[p]{} 0$$

Corollaire 64.

Si l'un des milieux ou pseudo-milieux $M_n^{\alpha,\beta}$ converge en probabilité vers une limite certaine l, ils convergent tous vers cette limite.

X - STABILITE PRESQUE COMPLETE DU MILIEU ET DE L'ETENDUE -

En s'appuyant sur les théorèmes 60, 61 & 62, on obtient les résultats suivants :

THEOREME 65 -

Le milieu M_n (ou l'étendue R_n) d'un échantillon est stable presque complètement si et seulement si les deux valeurs extrêmes Y_n et Z_n sont stables presque complètement.

On a alors :

$$M_n - \frac{1}{2}\left[F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + F^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \xrightarrow[p.co.]{} 0$$

Corollaire 65.

Pour que M_n converge presque complètement vers une limite certaine l, il faut et il suffit que Y_n et Z_n soient stables presque complètement et que l'on ait :

$$l - \frac{1}{2}\left[F^{-1}(1 - h) + F^{-1}(h)\right] \longrightarrow 0 \quad \text{avec } h.$$

THEOREME 66 -

La stabilité presque complète de l'un des milieux ou pseudo-milieux $M_n^{\alpha,\beta}$ entraîne celle de tous les autres, et de plus :

$$M_n^{\alpha,\beta} - M_n \xrightarrow[p.co.]{} 0$$

Corollaire 66.

Si l'un des milieux ou pseudo-milieux $M_n^{\alpha,\beta}$ converge presque complètement vers une limite certaine l, ils convergent tous vers cette limite.

CHAPITRE VI

ÉTUDE DE CERTAINES LOIS LIMITES

I - INTRODUCTION -

Les premiers statisticiens qui étudièrent les valeurs extrêmes d'un échantillon constatèrent qu'en réduisant convenablement la loi de Y_n, c'est-à-dire en substituant à Y_n la variable $a_n Y_n + b_n$ ($a_n > 0$), celle-ci admet souvent une loi limite :

$$L(x) = \lim_{n \to \infty} F^n(a_n x + b_n)$$

Dès lors, les deux problèmes suivants étaient posés :

1/ - Quelles sont les formes possibles de $L(x)$?

2/ - Quelles conditions doit vérifier $F(x)$ pour que $F^n(a_n x + b_n)$ converge vers une loi $L(x)$ d'un type déterminé ?

D'importants résultats ont été indiqués sur ce sujet par Fisher et Tippett, Gumbel et Von Mises, mais c'est Gnedenko qui a résolu (en 1943) les deux questions précédentes dans le cas général et de façon vraiment rigoureuse.

La méthode suivie par Gnedenko pour résoudre le premier problème s'étend d'elle-même à un problème un peu plus complexe, et doué, nous semble-t-il, de quelque intérêt pratique.

Considérons un système de k variables aléatoires $X^1, X^2, \dots X^k$, ayant pour f. d. r. $F(x^1, x^2, \dots x^k)$. Ce sont les coordonnées d'un point M de l'espace euclidien E^k.

En faisant n épreuves indépendantes, on obtient n points M_1, M_2, $\dots M_n$. Appelons $X_i^1, X_i^2, \dots X_i^k$ les coordonnées de M_i, et posons :

$$Y_n^j = \mathrm{Max}\{X_1^j, X_2^j, \dots X_n^j\} \qquad (j = 1, 2, \dots k)$$

La f. d. r. du point $(Y_n^1, Y_n^2, \dots Y_n^k)$ est :

$$F_n(x^1, x^2, \dots x^k) = F^n(x^1, x^2, \dots x^k)$$

Quelles sont alors les lois limites possibles de l'ensemble $(Y_n^1, \dots Y_n^k)$? Dans l'hypothèse $k = 1$, nous montrerons comment certains de nos résultats peuvent s'appliquer à la détermination des lois limites du milieu ou de l'étendue, mais nous n'insisterons pas sur ce point, qui a déjà fait l'objet de nombreux travaux.

A - CONVERGENCE DE DEUX LOIS DE PROBABILITE DU MEME TYPE -

I - CAS DE LOIS A UNE SEULE VARIABLE -

1/ - Définition.

On dit que deux f. d. r. $F(x)$ et $F^*(x)$ sont du même type s'il existe deux constantes $a > 0$ et b telles que :

$$F^*(x) = F(ax + b)$$

Cette terminologie est classique depuis Khintchine et P. Lévy. Il est clair que la propriété pour deux f. d. r. d'être du même type est une relation d'équivalence dans l'ensemble des f. d. r. En principe, nous considèrerons des f. d. r. non dégénérées (c'est-à-dire telles que $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$) et non unitaires (c'est-à-dire telles que toute la probabilité soit concentrée en un point). Une loi ni dégénérée ni unitaire sera dite propre. On définirait de façon similaire deux f. d. r. de même type dans le cas de plusieurs variables.

2/ - THEOREME 67 -

Etant donné une suite de f. d. r. $F_n(x)$, supposons qu'il existe des constantes $a_n > 0$, $\alpha_n > 0$, b_n et β_n telles que

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow[\mathcal{C}]{} \Phi(x)$$

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow[\mathcal{C}]{} \psi(x)$$

les deux fonctions $\Phi(x)$ et $\psi(x)$ correspondant à des lois propres. Dans ces conditions, $\Phi(x)$ et $\psi(x)$ sont du même type.

Démonstration.

Soit E l'ensemble des points de continuité de $\Phi(x)$ et E' l'ensemble des points de continuité de $\psi(x)$.

Puisque $\Phi(x)$ est non dégénérée et non unitaire, il existe dans E deux nombres x_o et x_1 vérifiant les inégalités :

$$0 < \Phi(x_o) \leqslant \Phi(x_1) < 1 \quad ; \quad x_o < x_1$$

Considérons alors la suite ξ_n définie par :

$$a_n x_o + b_n = \alpha_n \xi_n + \beta_n$$

On a :

$$F_n(a_n x_o + b_n) = F_n(\alpha_n \xi_n + \beta_n)$$

La suite ξ_n est bornée. En effet :

a) si ξ_n n'était pas majorée, on pourrait trouver une suite infinie n_i telle que, aussi grand que soit $A \in E'$, on ait .

$$\xi_{n_i} > A ,$$

donc :

$$F_{n_i}(\alpha_{n_i} \xi_{n_i} + \beta_{n_i}) \geqslant F_{n_i}(\alpha_{n_i} A + \beta_{n_i})$$

et à la limite :

$$\Phi(x_o) \geqslant \psi(A)$$

Cela entraînerait $\Phi(x_o) = 1$ contrairement à l'hypothèse.

b) On verrait de même que si ξ_n n'était pas minorée, on aurait $\Phi(x_o) = 0$, ce qui est impossible.

D'autre part, on peut écrire :

$$\xi_n = \frac{a_n}{\alpha_n} x_o + \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n}$$

d'où :

$$-\infty < \frac{a_n}{\alpha_n} x_o + \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n} < +\infty \qquad (1)$$

Par analogie :

$$-\infty < \frac{a_n}{\alpha_n} x_1 + \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n} < +\infty \qquad (2)$$

On déduit de (1) et (2) que :

$$-\infty < \frac{a_n}{\alpha_n}(x_1 - x_o) < +\infty$$

donc que $\frac{a_n}{\alpha_n}$ est borné. Il en résulte que $\frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n}$ est aussi bornée. Finalement, nous voyons que l'on peut extraire de la suite des n une suite n_j pour laquelle :

$$\lim_{j \to \infty} \frac{a_{n_j}}{\alpha_{n_j}} = \lambda \quad ; \quad \lim_{j \to \infty} \frac{b_{n_j} - \beta_{n_j}}{\alpha_{n_j}} = \mu$$

où λ et μ sont deux nombres finis. On a d'ailleurs $\lambda \neq 0$, car par raison de symétrie, le rapport $\frac{\alpha_n}{a_n}$ est borné.

Choisissons alors un nombre $x \in E$ et tel que :

$$\xi = \lambda x + \mu \in E'.$$

La suite ξ_{n_j} définie par :

$$a_{n_j} x + b_{n_j} = \alpha_{n_j} \xi_{n_j} + \beta_{n_j} \tag{3}$$

converge vers ξ. Aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, on peut toujours trouver deux nombres $h_1 > 0$ et $h_2 > 0$ vérifiant les conditions

$$h_1 < \varepsilon \; ; \; h_2 < \varepsilon \; ; \quad \xi - h_1 \in E' \quad ; \quad \xi + h_2 \in E'$$

On aura alors, pour $j > J(\varepsilon)$: $\xi - h_1 < \xi_{n_j} < \xi + h_2$ et :

$$F_{n_j} [\alpha_{n_j} (\xi - h_1) + \beta_{n_j}] \leqslant F_{n_j} (\alpha_{n_j} \xi_{n_j} + \beta_{n_j}) \leqslant F_{n_j} [\alpha_{n_j} (\xi + h_2) + \beta_{n_j}]$$

d'où, en passant à la limite et en tenant compte de (3) :

$$\psi (\xi - h_1) \leqslant \Phi (x) \leqslant \psi (\xi + h_2)$$

La fonction ψ étant continue pour la valeur de ξ envisagée, on a nécessairement :

$$\Phi (x) = \psi (\xi) = \psi (\lambda x + \mu)$$

Cette relation est établie pour tout x sauf peut-être pour un ensemble dénombrable de points. On en déduit qu'elle est vraie quel que soit x, en remarquant que $\Phi(x)$ et $\psi(x)$ sont monotones croissantes, et continues à gauche.

Ainsi, ces deux fonctions sont bien du même type.

Corollaire 67.

S'il existe des constantes $a_n > 0$, $\alpha_n > 0$, b_n et β_n telles que :

$$F_n (a_n x_n + b_n) \xrightarrow[\ell]{} \Phi (x) \tag{4}$$

$$F_n (\alpha_n x_n + \beta_n) \xrightarrow[\ell]{} \Phi (x) \tag{5}$$

où $\Phi(x)$ est une loi propre, on a nécessairement :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\alpha_n} = 1 \quad ; \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n} = 0$$

Réciproquement, si ces deux conditions sont satisfaites, la relation (4) implique la relation (5).

Démonstration.

1/ - D'après ce que nous avons vu plus haut, si les relations (4) et (5) sont vraies, on a :

$$\frac{a_n}{\alpha_n} < +\infty, \quad \frac{\alpha_n}{a_n} < +\infty, \qquad -\infty < \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n} < +\infty$$

Supposons que a_n/α_n ne tende pas vers 1. On pourrait alors trouver une suite n_i telle que :

$$\frac{a_{n_i}}{\alpha_{n_i}} \longrightarrow \lambda, \quad \text{avec } \lambda \neq 1 \text{ et } \neq 0$$

et que :

$$\frac{b_{n_i} - \beta_{n_i}}{\alpha_{n_i}} \longrightarrow \mu$$

En procédant comme ci-dessus, nous aboutirions à la relation :

$$\Phi(x) \equiv \Phi(\lambda x + \mu) \qquad (6)$$

Soit x_o le nombre défini par : $x_o = \lambda x_o + \mu$

Introduisons la nouvelle variable $z = x - x_o$, et posons :

$$\Phi(x) = \Phi(x_o + z) = \hat{\Phi}(z)$$

Il vient :

$$\Phi(\lambda x + \mu) = \Phi[\lambda(x_o + z) + \mu] = \hat{\Phi}[\lambda(x_o + z) + \mu - x_o] = \hat{\Phi}(\lambda z)$$

La relation (6) s'écrit :

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{\Phi}(\lambda z)$$

En itérant, on obtient :

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{\Phi}(\lambda^n z)$$

où n est un entier positif quelconque. Pour tout $z > 0$, on a :

$$\hat{\Phi}(z) = \lim_{n \to \infty} \hat{\Phi}(\lambda^n z) = \hat{\Phi}(+\infty) = 1$$

Pour tout $z < 0$:

$$\hat{\Phi}(z) = \lim_{n \to \infty} \hat{\Phi}(\lambda^n z) = \hat{\Phi}(-\infty) = 0$$

La fonction $\Phi(x)$, supposée non dégénérée, serait donc unitaire, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent :

$$\lim_{n \to \infty} (a_n/\alpha_n) = 1$$

Supposons maintenant que $(b_n - \beta_n)/\alpha_n$ ne tende pas vers 0. Il existerait alors une suite n_i telle que :

$$b_{n_i} - \beta_{n_i})/\alpha_{n_i} \longrightarrow \mu$$

avec $\mu \neq 0$. On aurait donc :

$$\Phi(x) = \Phi(x + \mu)$$

d'où l'on déduit : $\Phi(x) = \Phi(x + k\mu)$

k étant un entier quelconque. En faisant tendre k vers $+\infty$ ou $-\infty$, on obtient :

$$\Phi(x) = \Phi(+\infty) = \Phi(-\infty)$$

ce qui est impossible puisque $\Phi(x)$ n'est pas dégénérée. On a donc nécessairement :

$$\lim_{n \to \infty} (b_n - \beta_n)/\alpha_n = 0$$

2/ - Réciproque.

Partons des conditions :

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow[E]{} \Phi(x) \qquad \text{loi propre}$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n/\alpha_n) = 1 \quad ; \quad \lim_{n \to \infty} (b_n - \beta_n)/\alpha_n = 0$$

Prenons un nombre arbitraire x dans E, et associons-lui la suite ξ_n définie par :

$$a_n \xi_n + b_n = \alpha_n x + \beta_n$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, $\xi_n \longrightarrow x$ et, puisque ce point est un point de continuité de $\Phi(x)$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} F_n(a_n \xi_n + b_n) = \Phi(x)$$

d'où :

$$\lim_{n \to \infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = \Phi(x) \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

III - CAS DE LOIS A PLUSIEURS VARIABLES -

Les résultats analogues au théorème 67 et au corollaire 67 pour des f. d. r. de plusieurs variables s'établissent facilement si l'on s'appuie sur certaines propriétés de ces f. d. r.

Signalons tout d'abord qu'une f. d. r. de plusieurs variables sera dite propre si et seulement si toutes les f. d. r. marginales associées sont des lois propres ; unitaire, si l'une des marges est unitaire.

THEOREME 68 -

Si $\Phi(x^1, +\infty, \dots +\infty)$ est continue pour $x^1 = x^1_o$, la fonction $\Phi(x^1, x^2, \dots x^k)$ est continue dans tout le plan $x^1 = x^1_o$, sauf peut-être en son intersection avec un ensemble dénombrable de régions :

$$x^i = \text{constante} \quad (i = 2, 3, \dots \text{ ou } k)$$

<u>Démonstration.</u>

Choisissons deux points :

$$M_o(x^1_o, x^2_o, \dots x^k_o) \quad \text{et} \quad M_1(x^1_1, x^2_1, \dots x^k_1) :$$

le premier est dans le plan $x^1 = x^1_o$, le second est absolument quelconque. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\Phi(M_1) - \Phi(M_o) = {} & [\Phi(x^1_1, x^2_1, \dots x^k_1) - \Phi(x^1_o, x^2_1, \dots x^k_1)] \\ & + [\Phi(x^1_o, x^2_1, \dots x^k_1) - \Phi(x^1_o, x^2_o, x^3_1, \dots x^k_1)] + \dots \\ & + [\Phi(x^1_o, x^2_o, \dots x^{k-1}_o, x^k_1) - \Phi(x^1_o, x^2_o, \dots x^k_o)] \qquad (7)\end{aligned}$$

Montrons alors que :

$$\begin{aligned}|\Phi(x^1_1, x^2_1, \dots x^k_1) - \Phi(x^1_o, x^2_1, \dots x^k_1)| \leqslant {} & |\Phi(x^1_1, +\infty, \dots +\infty) \\ & - \Phi(x^1_o, +\infty, \dots +\infty)| \qquad (8)\end{aligned}$$

Supposons par exemple $x_1^1 > x_o^1$. Après avoir supprimé les signes de valeur absolue, mettons l'inégalité ci-dessus sous la forme :

$$\Phi(x_o^1, +\infty, \ldots +\infty) - \Phi(x_o^1, x_1^2, \ldots x_1^k) \leqslant \Phi(x_1^1, +\infty, \ldots +\infty) - \Phi(x_1^1, x_1^2, \ldots x_1^k)$$

Elle est maintenant évidente, car le premier membre est égal à :

$$\Pr\{X^1 < x_o^1\} - \Pr\{(X^1 < x_o^1) \cap [\bigcap_{i=2}^{k}(X^i < x_1^i)]\}$$
$$= \Pr\{(X^1 < x_o^1) \cap [\bigcup_{i=2}^{k}(X^i \geqslant x_1^i)]\}$$

tandis que le second est :

$$\Pr\{(X^1 < x_1^1) \cap [\bigcup_{i=2}^{k}(X^i \geqslant x_1^i)]\}$$

On traiterait de la même façon le cas $x_1^1 < x_o^1$, et l'inégalité (8) est ainsi établie. En l'appliquant à l'équation (7), on obtient :

$$|\Phi(M_1) - \Phi(M_o)| < \sum_{i=1}^{k} |\Phi(+\infty, \ldots x_1^i, \ldots +\infty) - \Phi(+\infty, \ldots x_o^i, \ldots +\infty)$$

Dans ces conditions, si l'on pose :

$$s(x_o^1, x_o^2, \ldots x_o^k) = \Phi(x_o^1 + 0, x_o^2 + 0, \ldots x_o^k + 0) - \Phi(x_o^1, x_o^2, \ldots x_o^k)$$

on a :

$$s(x_o^1, \ldots x_o^k) \leqslant \sum_{i=2}^{k} [\Phi(+\infty, \ldots x_o^i + 0, \ldots +\infty) - \Phi(+\infty, \ldots x_o^i, \ldots +\infty)]$$

ce qui s'écrit, en appelant $s_{X^i}(x^i)$ le "saut" de la loi marginale de X^i au point x_i :

$$s(x_o^1, x_o^2, \ldots x_o^k) \leqslant s_{X^2}(x_o^2) + \ldots + s_{X^k}(x_o^k)$$

Par suite :

$$\{s(x_o^1, \ldots x_o^k) > 0\} \Longrightarrow \bigcup_{i=2}^{k} \{s_{X^i}(x_o^i) > 0\}$$

Or, $s_{X^i}(x^i)$ n'est positif que pour une infinité dénombrable de valeurs de x^i, d'où le théorème.

<u>Lemme 69.</u>

Si une suite de f. d. r. $F_n(x^1, x^2, \ldots x^k)$ converge légalement vers $\Phi(x^1, x^2, \ldots x^k)$, cette fonction vérifiant la condition $\Phi(+\infty, +\infty, \ldots +\infty) = 1$,

la convergence de $F_n(x^1, y, \dots y)$ vers $F_n(x^1, +\infty, \dots +\infty)$ quand $y \longrightarrow +\infty$ est uniforme par rapport à n.

Démonstration.

Si le lemme était en défaut, il existerait un nombre $\varpi > 0$, une suite d'indices n_j et une suite de valeurs de y (y_{n_j}) tels que :

$$y_{n_j} \longrightarrow +\infty \quad \text{avec } j \text{ , et}$$

$$F_{n_j}(x^1, +\infty, \dots +\infty) - F_{n_j}(x^1, y_{n_j}, \dots y_{n_j}) > \varpi$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit, on peut trouver un point $(A^1, \dots A^k)$ en lequel Φ est continue, et vérifie :

$$A^1 \geqslant x^1 \quad ; \quad \Phi(A^1, A^2, \dots A^k) \geqslant 1 - \varepsilon$$

On a :

$$\lim_{n \to \infty} F_n(A^1, A^2, \dots A^k) = \Phi(A^1, A^2, \dots A^k)$$

donc : $$F_{n_j}(A^1, A^2, \dots A^k) > 1 - 2\varepsilon \quad \text{quand } j > j_\varepsilon \tag{9}$$

D'autre part :

$$F_{n_j}(A^1, +\infty, \dots +\infty) - F_{n_j}(A^1, y_{n_j}, \dots y_{n_j}) \geqslant F_{n_j}(x^1, +\infty, \dots +\infty)$$
$$- F_{n_j}(x^1, y_{n_j}, \dots y_{n_j}) > \varpi$$

Pour j assez grand :

$$y_{n_j} > \text{Max}(A^2, \dots A^k) \text{ ,}$$

d'où : $$F_{n_j}(A^1, +\infty, \dots +\infty) - F_{n_j}(A^1, A^2, \dots A^k) > \varpi$$

et cette inégalité est manifestement incompatible avec l'inégalité (9) dès que $2\varepsilon < \varpi$.

Lemme 69'.

Etant donné une f. d. r. $\Phi(x^1, x^2, \dots x^k)$ vérifiant la condition

$$\Phi(+\infty, \dots +\infty) = 1,$$

si une suite de f. d. r. $F_n(x^1, x^2, \dots x^k)$ converge légalement vers Φ , la suite des lois marginales $F_n(x^1, +\infty, \dots +\infty)$ converge légalement vers $\Phi(x^1, +\infty, \dots +\infty)$.

Démonstration.

Soit x_o^1 un point de continuité de $\Phi(x^1, +\infty, \dots +\infty)$.

A tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il correspond en vertu du lemme 69 deux nombres y et n_ε tels que, pour $n > n_\varepsilon$, on ait :

$$F_n(x_o^1, +\infty, \dots +\infty) - F_n(x_o^1, y, \dots y) < \varepsilon$$

et

$$\Phi(x_o^1, +\infty, \dots +\infty) - \Phi(x_o^1, y, \dots y) < \varepsilon$$

L'ensemble des points de discontinuité de $\Phi(x^1, \dots x^k)$ situés dans le plan $x^1 = x_o^1$ correspondant à un ensemble dénombrable de valeurs de $x^2, x^3, \dots x^k$, on peut choisir y de façon que $\Phi(x^1, \dots x^k)$ soit continue au point $(x_o^1, y, \dots y)$.

En ce cas :

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x_o^1, y, \dots y) = \Phi(x_o^1, y, \dots y)$$

Il existe donc un indice $N \geqslant n_\varepsilon$ tel que $n > N$ entraîne :

$$| F_n(x_o^1, y, \dots y) - \Phi(x_o^1, y, \dots y) | < \varepsilon$$

Finalement, on a quand $n > N$:

$$| F_n(x_o^1, +\infty, \dots +\infty) - \Phi(x_o^1, +\infty, \dots +\infty) |$$
$$\leqslant | F_n(x_o^1, +\infty, \dots +\infty) - F_n(x_o^1, y, \dots y) |$$
$$+ | F_n(x_o^1, y, \dots y) - \Phi(x_o^1, y, \dots y) |$$
$$+ | \Phi(x_o^1, y, \dots y) - \Phi(x_o^1, +\infty, \dots +\infty) | \leqslant 3\varepsilon$$

THEOREME 69 -

Etant donné une suite de f. d. r. $F_n(x^1, x^2, \dots x^k)$, supposons qu'il existe des constantes $a_n^i > 0$, $\alpha_n^i > 0$, b_n^i et β_n^i $(i = 1, 2, \dots k)$ telles que :

$$F_n(a_n^1 x^1 + b_n^1, \dots a_n^k x^k + b_n^k) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \Phi(x^1, \dots x^k)$$

$$F_n(\alpha_n^1 x^1 + \beta_n^1, \dots \alpha_n^k x^k + \beta_n^k) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \psi(x^1, \dots x^k)$$

les deux fonctions Φ et ψ correspondant à des lois propres. Dans ces conditions, $\Phi(x^1, x^2, \dots x^k)$ et $\psi(x^1, x^2, \dots x^k)$ sont du même type.

Démonstration.

D'après le lemme précédent :

$$F_n(a_n^1 x + b_n^1, +\infty, \dots +\infty) \xrightarrow[\mathcal{C}]{} \Phi(x^1, +\infty, \dots +\infty)$$

$$F_n(\alpha_n^1 x^1 + \beta_n^1, +\infty, \dots +\infty) \xrightarrow[\mathcal{C}]{} \psi(x^1, +\infty, \dots +\infty)$$

Donc les quantités α_n^1/a_n^1, a_n^1/α_n^1, et $(\beta_n^1 - b_n^1)/a_n^1$ sont bornées. D'une façon générale, les quantités α_n^i/a_n^i, a_n^i/α_n^i et $(\beta_n^i - b_n^i)/a_n^i$ $(i = 1, 2, \dots k)$ sont bornées. Par conséquent, il existe une suite d'indices n_ν telle que :

$$\lim_{\nu\to\infty} a_{n_\nu}^i/\alpha_{n_\nu}^i = \lambda^i \ (\neq 0 \ \& \ \infty) \ ; \quad \lim (b_{n_\nu}^i - \beta_{n_\nu}^i)/\alpha_{n_\nu}^i = \mu^i \ (\neq \infty)$$

A un point $x(x^1, x^2, \dots x^k)$ faisons correspondre le point $\xi_\nu(\xi_\nu^1, \dots \xi_\nu^k)$ par les formules :

$$a_{n_\nu}^i x^i + b_{n_\nu}^i = \alpha_{n_\nu}^i \xi_\nu^i + \beta_{n_\nu}^i \qquad (i = 1, 2, \dots k)$$

On a :

$$\xi_\nu^i = \frac{a_{n_\nu}^i}{\alpha_{n_\nu}^i} x^i + \frac{b_{n_\nu}^i - \beta_{n_\nu}^i}{\alpha_{n_\nu}^i}$$

et l'on voit que la suite de points ξ_ν a une limite ξ quand $\nu \longrightarrow \infty$, de coordonnées :

$$\xi^i = \lambda^i x^i + \mu^i$$

Supposons qu'aux points x et ξ considérés, les fonctions $\Phi(x)$ et $\psi(\xi)$ soient continues. Alors :

$$\lim_{\nu\to\infty} F_{n_\nu}(\alpha_{n_\nu}^1 \xi_\nu^1 + \beta_{n_\nu}^1, \dots \alpha_{n_\nu}^k \xi_{n_\nu}^k + \beta_{n_\nu}^k)$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} F_{n_\nu}(a_{n_\nu}^1 x^1 + b_{n_\nu}^1, \dots a_{n_\nu}^k x^k + b_{n_\nu}^k) = \Phi(x)$$

On peut toujours trouver k nombres positifs h^i tels que $h^i < \varepsilon$ et que la fonction ψ soit continue aux points $(\xi^i - h^i)$ et $(\xi^i + h^i)$.

Pour $\nu > \nu(\varepsilon)$, on a :

$$\xi^i - h^i \leqslant \xi_\nu^i \leqslant \xi^i + h^i$$

et

$$F_{n_\nu}[\alpha_{n_\nu}^1(\xi^1 - h^1) + \beta_{n_\nu}^1, \dots \alpha_{n_\nu}^k(\xi^k - h^k) + \beta_n^k]$$

$$\leqslant F_{n_\nu}[\alpha_{n_\nu}^1 \xi_\nu^1 + \beta_{n_\nu}^1, \dots \alpha_{n_\nu}^k \xi_\nu^k + \beta_{n_\nu}^k]$$

$$\leqslant F_n[\alpha_{n_\nu}^1(\xi^1 + h^1) + \beta_{n_\nu}^1, \dots \alpha_{n_\nu}^k(\xi^k + h^k) + \beta_{n_\nu}^k]$$

On en déduit, en passant à la limite :

$$\psi(\xi^1 - h^1, \ldots \xi^k - h^k) \leqslant \Phi(x^1, \ldots x^k) \leqslant \psi(\xi^1 + h^1, \ldots \xi^k + h^k)$$

et, puisque ψ est continue au point $(\xi^1, \ldots \xi^k)$:

$$\psi(\xi^1, \xi^2, \ldots \xi^k) = \Phi(x^1, x^2, \ldots x^k)$$

En vertu du fait que Φ et ψ sont monotones et que l'ensemble de leurs points de discontinuité est de mesure nulle, l'égalité précédente est partout vérifiée, donc ψ et Φ sont bien du même type :

$$\psi(\lambda^1 x^1 + \mu^1, \ldots \lambda^k x^k + \mu^k) = \Phi(x^1, \ldots x^k)$$

Corollaire 69.

S'il existe des constantes $a_n^i > 0$, $\alpha_n^i > 0$, b_n^i et β_n^i $(i = 1, 2, \ldots k)$ telles que :

$$F_n(a_n^1 x^1 + b_n^1, \ldots a_n^k x^k + b_n^k) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \Phi(x^1, x^2, \ldots x^k) \qquad (10)$$

$$F_n(\alpha_n^1 x^1 + \beta_n^1, \ldots \alpha_n^k x^k + \beta_n^k) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \Phi(x^1, x^2, \ldots x^k) \qquad (11)$$

où Φ est une loi propre, on a nécessairement :

$$\lim_{n \to \infty} a_n^i / \alpha_n^i = 1 \ ; \qquad \lim_{n \to \infty} (b_n^i - \beta_n^i)/\alpha_n^i = 0 \qquad (12)$$

$(i = 1, 2, \ldots k)$

Réciproquement, si la condition (10) est satisfaite, les conditions (12) entraînent la condition (11).

Démonstration.

Si (10) et (11) sont vraies, on a, d'après le lemme 69' :

$$F_n(a_n^1 x^1 + b_n^1, +\infty, \ldots +\infty) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \Phi(x^1, +\infty, \ldots +\infty)$$

$$F_n(\alpha_n^1 x^1 + \beta_n^1, +\infty, \ldots +\infty) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \Phi(x^1, +\infty, \ldots +\infty)$$

d'où l'on déduit, d'après le corollaire 69, que $a_n^1/\alpha_n^1 \longrightarrow 1$ et $(b_n^1 - \beta_n^1)/\alpha_n^1 \longrightarrow 0$.

Même démonstration pour les autres valeurs de i.

Pour établir la réciproque, choisissons un point de continuité de Φ, soit $(x^1, x^2, \ldots x^k)$, et associons-lui la suite de points ξ_n définie par :

$$a_n^i \xi_n^i + b_n^i = \alpha_n^i x^i + \beta_n^i \quad (i = 1, 2, \ldots k)$$

On a : $F_n(\alpha_n^1 x^1 + \beta_n^1, \ldots \alpha_n^k x^k + \beta_n^k) = F_n(a_n^1 \xi_n^1 + b_n^1, \ldots a_n^k \xi_n^k + b_n^k)$

Quand $n \longrightarrow \infty$, $\xi_n \longrightarrow x$, et puisque Φ est continue en ce point le second membre de l'égalité précédente tend vers $\Phi(x)$. On a donc bien, en tout point où Φ est continue :

$$\lim_{n \to \infty} F_n(\alpha_n^1 x^1 + \beta_n^1, \dots \alpha_n^k x^k + \beta_n^k) = \Phi(x^1, \dots x^k)$$

B - DETERMINATION D'UNE CLASSE DE LOIS LIMITES -

Soit $Y_n^1, Y_n^2, \dots Y_n^k$ les plus grandes valeurs d'un échantillon de n points à k dimensions. Nous allons rechercher les lois limites possibles pour un tel système de v. a., c'est-à-dire les formes possibles des limites de la fonction :

$$F^n(a_n^1 x^1 + b_n^1, \dots a_n^k x^k + b_n^k)$$

Nous désignerons par L^k l'ensemble de ces lois limites, dont les marges seront toujours supposées ni dégénérées, ni unitaires. L^1 contient seulement trois types de lois, mais pour $k > 1$, on a des ensembles qui dépendent de fonctions arbitraires.

IV - L'IDENTITE FONDAMENTALE -

THEOREME 70 -

Pour qu'une f. d. r. propre $\Phi(x^1, x^2, \dots x^k)$ appartienne à L^k, il faut et il suffit qu'à toute valeur de l'entier $p > 0$ corresponde un système de constantes $\alpha_p^i > 0$, β_p^i donnant lieu à l'identité :

$$\Phi^p(\alpha_p^1 x^1 + \beta_p^1, \dots \alpha_p^k x^k + \beta_p^k) = \Phi(x^1, x^2, \dots x^k)$$

Démonstration.

a) Si $\Phi \in L^k$, il existe une f. d. r. $F(x^1, x^2, \dots x^k)$ telle que :

$$\Phi(x^1, x^2, \dots x^k) = \lim. F^n(a_n^1 x^1 + b_n^1, \dots a_n^k x^k + b_n^k)$$

Soit p et m deux entiers positifs, le premier fixe, le second variable. On peut écrire :

$$\lim_{m \to \infty} [F^m(a_{mp}^1 x^1 + b_{mp}^1, \dots a_{mp}^k x^k + b_{mp}^k)]^p = \Phi(x^1, x^2, \dots x^k)$$

Il en résulte que $F^m(a_{mp}^1 x^1 + b_{mp}^1, \dots a_{mp}^k x^k + b_{mp}^k)$ a une limite quand $m \longrightarrow \infty$ et, d'après le théorème 69, cette limite est nécessairement du même type que Φ. Il existe donc des constantes α_p^i, β_p^i pour lesquelles :

$$\Phi^p(\alpha_p^1 x^1 + \beta_p^1, \dots \alpha_p^k x^k + \beta_p^k) = \Phi(x^1, x^2, \dots x^k)$$

b) Réciproquement, si l'identité précédente peut être réalisée pour chaque valeur de p, $\Phi \in L^k$. Il suffit pour le voir de choisir :

$$F(x^1, x^2, \dots x^k) = \Phi(x^1, x^2, \dots x^k)$$

V - DETERMINATION DE L^1 -

1/ - Rappelons qu'il s'agit de l'ensemble des f. d. r. propres $\Phi(x)$ telles que, à toute valeur de k (entier positif) il corresponde deux nombres α_k et β_k pour lesquels :

$$\Phi^k(\alpha_k x + \beta_k) = \Phi(x) \qquad (13)$$

THEOREME 71 -

Etant donné une f. d. r. $\Phi(x)$ vérifiant l'identité (13) pour une valeur déterminée de $k \geqslant 2$, il se produit nécessairement l'une des trois circonstances suivantes :

a) $\alpha_k > 1$.

On a alors : $\Phi(x) = 0$ pour $x \leqslant \beta_k/(1 - \alpha_k)$

et : $0 < \Phi(x) < 1$ pour $x > \beta_k/(1 - \alpha_k)$

b) $\alpha_k < 1$.

On a : $0 < \Phi(x) < 1$ pour $x < \beta_k/(1 - \alpha_k)$

et : $\Phi(x) = 1$ pour $x \geqslant \beta_k/(1 - \alpha_k)$

c) $\alpha_k = 1$.

On a : $0 < \Phi(x) < 1$ pour tout x.

Démonstration.

a) Si $\alpha_k \neq 1$, l'équation : $x = \alpha_k x + \beta_k$

admet une solution : $x_0 = \beta_k/(1 - \alpha_k)$

L'identité (13) peut s'écrire :

$$\Phi^k(x_0 + \alpha_k h) = \Phi(x_0 + h) \qquad (14)$$

Pour h = 0, cela donne : $\Phi^k(x_0) = \Phi(x_0)$

d'où : $\Phi(x_o) = 0$ ou : $\Phi(x_o) = 1$

Supposons d'abord $\alpha_k > 1$. Si h est négatif, on a :

$$x_o + \alpha_k h < x_o + h$$

donc : $$\Phi(x_o + \alpha_k h) \leqslant \Phi(x_o + h)$$

Mais, en vertu de (14) :

$$\Phi(x_o + \alpha_k h) \geqslant \Phi(x_o + h)$$

On a donc :

$$\Phi(x_o + \alpha_k h) = \Phi(x_o + h)$$

et par suite :

$$\Phi^k(x_o + h) = \Phi(x_o + h) \quad \text{pour tout} \quad h < 0$$

La loi $\Phi(x)$ n'étant pas dégénérée, cela entraîne :

$$\Phi(x_o + h) = 0 \qquad \text{pour} \quad h < 0$$

On aura aussi : $\Phi(x_o) = 0$, puisque $\Phi(x)$ est continue à gauche.

Prenons maintenant une valeur positive quelconque de h, et montrons que :

$$0 < \Phi(x_o + h) < 1$$

En effet, si l'on avait :

$$\Phi(x_o + h) = 0,$$

on aurait également, d'après (14) :

$$\Phi(x_o + \alpha_k h) = 0$$

et, en itérant :

$$\Phi(x_o + \alpha_k^n h) = 0 \qquad (n \text{ entier} > 0)$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, $h\alpha_k^n \longrightarrow +\infty$, d'où : $\Phi(+\infty) = 0$

ce qui est impossible.

Si l'on avait :

$$\Phi\,(x_0 + h) = 1,$$

on aurait aussi, d'après (14)

$$\Phi\,(x_0 + h/\alpha_k) = 1$$

et, en itérant :

$$\Phi\,(x_0 + h/\alpha_k^n) = 1.$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, $h/\alpha_k^n \longrightarrow 0$, d'où : $\Phi\,(x_0 + 0) = 1.$

Cela est impossible, car $\Phi(x)$ n'est pas unitaire. La 1ère partie du théorème est donc établie.

b) Supposons $\alpha_k < 1$, et considérons le nombre x_0 défini plus haut. Si h est positif :

$$x_0 + \alpha_k h < x_0 + h$$

donc : $$\Phi(x_0 + \alpha_k h) \leqslant \Phi(x_0 + h)$$

Or, d'après (14) :

$$\Phi\,(x_0 + \alpha_k h) \geqslant \Phi(x_0 + h)$$

On a donc :

$$\Phi(x_0 + \alpha_k h) = \Phi\,(x_0 + h)$$

et par suite :

$$\Phi^k\,(x_0 + h) = \Phi\,(x_0 + h) \quad \text{pour tout} \quad h > 0.$$

La loi de $\Phi(x)$ n'étant pas dégénérée, cela entraîne :

$$\Phi(x_0 + h) = 1 \quad \text{pour } h > 0$$

$\Phi(x)$ n'étant pas unitaire, on aura aussi : $\Phi\,(x_0) = 1.$

Donnons à h une valeur négative quelconque, et montrons que :

$$0 < \Phi\,(x_0 + h) < 1$$

Si l'on avait :

$$\Phi\,(x_0 + h) = 0\,,$$

on aurait aussi, d'après (14) :

$$\Phi\,(x_0 + \alpha_k h) = 0,$$

et en itérant :

$$\Phi\,(x_o + \alpha_k^n\, h) = 0$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, $\alpha_k^n\, h \longrightarrow 0$, d'où : $\Phi\,(x_o) = 0$

ce qui est impossible.

Si l'on avait :

$$\Phi\,(x_o + h) = 1\ ,$$

on aurait aussi, d'après (14) :

$$\Phi\,(x_o + h/\alpha_k) = 1\ ,$$

et, par itération :

$$\Phi\,(x_o + h/\alpha_k^n) = 1$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, $h/\alpha_k^n + \longrightarrow -\infty$, d'où : $\Phi\,(-\infty) = 1$

ce qui est impossible.

c) Si $\alpha_k = 1$, la relation (13) s'écrit :

$$\Phi^k\,(x + \beta_k) = \Phi\,(x) \qquad (15)$$

On a évidemment $\beta_k \neq 0$, sans quoi $\Phi(x)$ serait dégénérée ou unitaire. Montrons que l'on ne peut avoir $\Phi(x) = 1$ pour une valeur finie de la variable. En effet, on aurait alors, d'après (15) $\Phi\,(x \mp \beta_k) = 1$ et, en itérant : $\Phi(x \pm n\beta_k) = 1$.

Il en résulterait, en faisant croître indéfiniment n :

$$\Phi\,(-\infty) = \Phi\,(+\infty) = 1,$$

ce qui est impossible.

On verrait de la même façon que $\Phi\,(x) \neq 0$ pour tout x.

Corollaire 71.

Soit une f. d. r. $\Phi(x) \in L^1$, c'est-à-dire vérifiant l'identité (13) pour toute valeur de k. Dans ces conditions, les coefficients α_k associés sont tous supérieurs à 1, ou tous inférieurs à 1, ou tous égaux à 1.

Dans les deux premiers cas, le nombre $x_o = \beta_k/(1 - \alpha_k)$ est indépendant de k.

Démonstration.

Appelons respectivement K_1, K_2, K_3 les sous-ensembles de L^1 formés par les f. d. r. $\Phi(x)$ telles que :

a) il existe un nombre x_0 vérifiant les conditions :

$$\Phi(x) = 0 \text{ pour } x \leqslant x_0 \; ; \; 0 < \Phi(x) < 1 \text{ pour } x > x_0$$

b) il existe un nombre x_0 vérifiant les conditions :

$$0 < \Phi(x) < 1 \text{ pour } x < x_0 \; ; \; \Phi(x) = 1 \text{ pour } x \geqslant x_0$$

c) On a : $0 < \Phi(x) < 1$ quel que soit x.

Ces trois sous-ensembles sont disjoints, et il résulte du théorème 71 que :

$$K_1 \cup K_2 \cup K_3 = L^1 ,$$

d'où l'on déduit la 1ère partie du corollaire.

Quant au nombre $x_0 = \beta_k/(1 - \alpha_k)$, il est clair qu'il ne dépend que de $\Phi(x)$, et non de k.

2/ - Etude de la famille K_1.

THEOREME 72 -

Pour qu'une f. d. r. appartienne à K_1, il faut et il suffit qu'elle soit du même type que l'une des fonctions $\Phi_\mu(x)$ ($\mu > 0$), définies par :

$$\Phi_\mu(x) = 0 \text{ pour } x \leqslant 0$$

$$\Phi_\mu(x) = \exp(-x^{-\mu}) \text{ pour } x > 0$$

Démonstration.

On vérifie immédiatement que toute fonction de même type qu'une fonction $\Phi_\mu(x)$ appartient à K_1. Etablissons la réciproque. Soit $\Phi(x)$ une fonction de K_1. D'après le théorème et le corollaire 71, il existe une constante x_0 telle que :

$$\Phi(x_0 + h) = 0 \text{ pour } h \leqslant 0 \; ; \; 0 < \Phi(x_0 + h) < 1 \text{ pour } h > 0$$

Il s'agit de déterminer $\Phi(x_0 + h)$ pour $h > 0$. Pour cela, posons :

$$f(h) = -\mathrm{Log}\,\Phi(x_0 + h)$$

La fonction f(h) est positive et monotone non croissante.

A tout entier $k > 0$, il correspond un nombre $\alpha_k > 1$ tel que :

$$k\, f(\alpha_k\, h) = f(h)$$

ou :

$$k\, f(u) = f\left(\frac{u}{\alpha_k}\right) \qquad (u > 0)$$

En particulier, on a :

$$\begin{cases} 2\, f(u) = f(Au) & A < 1 \\ 3\, f(u) = f(Bu) & B < 1 \end{cases}$$

En itérant, on obtient :

$$\begin{cases} f(A^n\, u) = 2\; f(u) & (n = 1, 2, \ldots) \\ f(B^n\, u) = 3\; f(u) & \end{cases} \qquad (16)$$

Puisque $f(u) \neq 0$ pour tout $u > 0$, il est impossible de trouver deux indices m et n tels que : $A^n = B^m$. Donc le rapport Log A / Log B est irrationnel.

Soit λ un nombre positif quelconque, et ε un nombre positif arbitrairement petit. L'ensemble des nombres de la forme :

$$n\,\frac{\text{Log } A}{\text{Log } B} - m$$

étant partout dense, on peut toujours choisir m et n de façon que :

$$\left|\, n\,\frac{\text{Log } A}{\text{Log } B} - m - \frac{\text{Log } \lambda}{\text{Log } B} \right| < \frac{\varepsilon}{|\text{Log } B|}$$

On a alors :

$$\frac{A^n}{B^m} = \lambda\, e^{\theta\epsilon} \qquad (-1 < \theta < 1)$$

On peut écrire, d'après les équations (16) :

$$f(\lambda\, e^{\theta\epsilon}\, u) = 2^n\; f\left(\frac{u}{B^m}\right)$$

$$f(u) = 3^m\; f\left(\frac{u}{B^m}\right)$$

d'où l'on déduit : $$F(\lambda\; e^{\theta\epsilon}\; u) = \frac{2^n}{3^m}\; f(u) \qquad (17)$$

Supposons alors que $\varepsilon \longrightarrow 0$ tandis que $m \longrightarrow +\infty$ et $n \longrightarrow +\infty$. On a :

$$\text{Log}\,\lambda = \lim_{\epsilon \to 0} (n \,\text{Log}\, A - m \,\text{Log}\, B) < \infty$$

D'après (17) on a aussi :

$$n \,\text{Log}\, 2 - m \,\text{Log}\, 3 < \infty$$

Il en résulte :

$$\frac{\text{Log}\, A}{\text{Log}\, B} = \frac{\text{Log}\, 2}{\text{Log}\, 3} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{m}{n}$$

Posons :

$$\frac{\text{Log}\, 2}{\text{Log}\, A} = \frac{\text{Log}\, 3}{\text{Log}\, B} = -\mu \qquad (\mu > 0)$$

On peut donc écrire :

$$\lim. \frac{2^n}{3^m} = \lambda^{-\mu}$$

Le second membre de (17) ayant une limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, le premier membre a également une limite, qui est $f(\lambda u)$, et l'on a :

$$f(\lambda u) = \lambda^{-\mu} f(u) \tag{18}$$

En faisant $u = 1$, il vient finalement :

$$f(\lambda) = \lambda^{-\mu} f(1)$$

ce qui prouve que $f(h)$ est de la forme :

$$f(h) = C.\, h^{-\mu}$$

C. Q. F. D.

Remarque.

La limite du second membre de (17) étant continue en λ, il est légitime d'écrire :

$$\lim. f(\lambda\, e^{\theta\epsilon}\, u) = f(\lambda u)$$

3/ - Etude de la famille K_2.

THEOREME 73 -

Pour qu'une f. d. r. appartienne à K_2, il faut et il suffit qu'elle soit du même type que l'une des fonctions $\psi_\nu(x)$ ($\nu > 0$), définies par :

$$\Psi_\nu (x) = \exp -(- x)^\nu \qquad \text{pour } x \leqslant 0$$

$$\Psi_\nu (x) = 1 \qquad \text{pour } x > 0$$

Démonstration.

Condition suffisante : évident.

Condition nécessaire : on procède comme au théorème 72, en remarquant simplement que, cette fois, f(h) est définie pour h < 0. On arrive ainsi à la relation :

$$f(\lambda u) = \lambda^\nu f(u) \qquad (\nu > 0)$$

qui donne, en faisant $u = -1$:

$$f(-\lambda) = \lambda^\nu f(-1)$$

d'où : $$f(h) = C.(-h)^\nu$$ C. Q. F. D.

4/ - Etude de la famille K_3.

THEOREME 74 -

Pour qu'une f. d. r. appartienne à K_3, il faut et il suffit qu'elle soit du même type que la fonction :

$$\Lambda (x) = \exp(- e^{-x})$$

Démonstration.

Condition suffisante : évident.

Condition nécessaire : nous avons vu que toute f. d. r. de K_3 est caractérisée par l'identité :

$$\Phi^k (x + \beta_k) = \Phi (x) \qquad (k = 2,3,\ldots) \qquad (19)$$

Le changement de variable $x = \text{Log } u$ $(u > 0)$ transforme $\Phi(x)$ en :

$$F(u) = \Phi (\text{Log } u).$$

Si l'on pose :

$$\beta_k = \text{Log } \alpha_k$$

l'identité (19) devient : $$F^k(\alpha_k u) = F(u)$$

Dans ces conditions, $F(u) \in K_1$, donc elle est de la forme :

$$F(u) = \exp(-u^{-\mu}) \qquad (\mu > 0)$$

Finalement, on a bien :

$$\Phi(x) = \exp(-e^{-\mu x})$$

Remarque.

Les f. d. r. du type $\Phi_\mu(x)$ et $\psi_\nu(x)$ sont généralement appelées "lois de Fréchet". La loi $\Lambda(x)$ est dite : "loi de Gumbel".

VI - DETERMINATION DE L^k -

1/ - Afin d'alléger les notations, nous prendrons k = 3 ; les résultats de notre étude s'étendent d'eux-mêmes au cas général.

Posons : $L^3 = L$. La famille L est donc l'ensemble des f. d. r. $\Phi(x, y, z)$ dont les marges ne sont ni dégénérées, ni unitaires, et qui vérifient pour toute valeur de l'entier $p > 0$ la relation :

$$\Phi^p(\alpha^1 x + \beta^1, \alpha^2 y + \beta^2, \alpha^3 z + \beta^3) = \Phi(x, y, z) \tag{20}$$

$$(\alpha^1 > 0, \ \alpha^2 > 0, \ \alpha^3 > 0)$$

2/ - Etude des marges.

Les lois marginales d'une fonction $\Phi \in L$ sont, par hypothèse, des lois propres ; désignons-les respectivement par A(x), B(y), et C(z). Elles vérifient les identités :

$$A^p(\alpha^1 x + \beta^1) = A(x) \quad ; \quad B^p(\alpha^2 y + \beta^2) = B(y)$$

$$C^p(\alpha^3 z + \beta^3) = C(z)$$

Donc, elles appartiennent à L^1 (ceci est d'ailleurs évident à priori). Nous allons supposer dorénavant que A(x) est du même type que Φ_μ, B(y) du même type que ψ_ν, et C(z) du même type que $\exp(-e^{-z})$. Moyennant une transformation linéaire sur chacune des variables X, Y et Z (qui conserve leur type), nous pouvons alors nous ramener au cas où :

$$A(x) = \exp(-x^{-\mu}) \ ; \quad B(y) = \exp[-(-y)^\nu] \ ; \quad C(z) = \exp(-e^{-z})$$

avec : $X > 0$ et $Y > 0$.

La fonction Φ est changée en une fonction $\psi(x, y, z)$ qui vérifie :

$$\psi^p(\alpha^1 x, \alpha^2 y, z + \beta_3) = \psi(x, y, z) \tag{21}$$

Nous appellerons L' la sous-famille de L formée par les f. d. r. propres qui satisfont cette identité pour toute valeur de p.

3/ - Considérons les trois v. a. positives U, V, W, déduites de X, Y et Z par les relations :

$$U = X^{\mu} \; ; \quad V = (-Y)^{-\nu} \quad ; \qquad W = \exp(Z)$$

Leurs f. d. r. marginales sont :

$$A_o(u) = \Pr\{U < u\} = \Pr\{X < u^{\frac{1}{\mu}}\} = \exp(-\frac{1}{u})$$

$$B_o(v) = \Pr\{V < v\} = \Pr\{Y < -v^{\frac{1}{\nu}}\} = \exp(-\frac{1}{y})$$

$$C_o(w) = \Pr\{W < w\} = \Pr\{Z < \mathrm{Log}\, w\} = \exp(-\frac{1}{w})$$

Quant à leur loi jointe $\circledast (u, v, w)$ elle est définie par :

$$\circledast (u, v, w) = \psi (u^{\frac{1}{\mu}}, - v^{-\frac{1}{\nu}}, \mathrm{Log}\, w)$$

Il est facile de voir que $\circledast \subset$ L. En effet, l'identité (21) peut s'écrire :

$$\psi^p (au^{\frac{1}{\mu}}, - bv^{-\frac{1}{\nu}}, \mathrm{Log}\, w + c) = \psi (u^{\frac{1}{\mu}}, - v^{-\frac{1}{\nu}}, \mathrm{Log}\, w)$$

ou : $$\circledast^p(a^{\mu}u, b^{-\nu} v, e^c w) = \circledast (u, v, w)$$

relation qui est de la forme :

$$\circledast^p (a'u, b'v, c'w) = \circledast (u, v, w)$$

En considérant les lois marginales de $\circledast$, on obtient immédiatement : $a' = b' = c' = p$. Finalement, $\circledast$ vérifie la relation :

$$\circledast^p(pu, pv, pw) = \circledast (u, v, w) \qquad (22)$$

4/ - Soit L'' l'ensemble des f. d. r. propres $\circledast$ vérifiant (22). Il est évident que L'' $\subset$ L, et qu'à toute fonction $\circledast \in$ L'' correspond un système de trois v. a. positives U, V, W, dont les lois marginales sont :

$$\exp(-\frac{1}{u}) \; ; \quad \exp(-\frac{1}{v}) \; ; \quad \exp(-\frac{1}{w})$$

THEOREME 75 -

Pour qu'une f. d. r. $\circledast (u, v, w)$ appartienne à L'' il faut et il suf-

fit que Log $\circledcirc$ (u, v, w) soit homogène de degré - 1 dans la région :

$$u > 0, \quad v > 0, \quad w > 0.$$

Démonstration.

Etant donné une fonction $\circledcirc \in L''$, posons :

$$g(u, v, w) = \operatorname{Log} \circledcirc (u, v, w)$$

quel que soit l'entier positif p, on a :

$$g(pu, pv, pw) = \frac{1}{p} g(u, v, w)$$

On en déduit que, p et q étant deux entiers > 0 arbitraires :

$$g(\frac{p}{q}u, \frac{p}{q}v, \frac{p}{q}w) = \frac{q}{p} g(u, v, w)$$

La condition d'homogénéité :

$$g(\lambda u, \lambda v, \lambda w) = \frac{1}{\lambda} g(u, v, w)$$

est donc satisfaite pour les valeurs rationnelles de λ. Par continuité, elle est satisfaite quel que soit λ.

Réciproquement, si une f. d. r. propre $\circledcirc$ vérifie cette condition, elle vérifie à fortiori l'équation (22), et ainsi appartient à L''.

THEOREME 76 -

Si une fonction $\circledcirc(u, v, w)$ appartient à L'', la f. d. r. $\psi (x, y, z)$ des trois variables : $X = U^{-\frac{1}{\mu}}$; $Y = - V^{-\frac{1}{\nu}}$; $Z = \operatorname{Log} W$ appartient à L'.

Démonstration.

On voit d'abord que les lois marginales de ψ sont respectivement : Φ_{μ}, Ψ_{ν}, et Λ. La fonction $\psi (x, y, z)$ est donc une loi propre. Dans la région $x > 0$, $y < 0$, on a :

$$\psi (x, y, z) = \circledcirc [x^{\mu}, (- y)^{-\nu}, e^{z}]$$

p étant un entier positif quelconque, l'identité de définition de $\circledcirc$ s'écrit alors :

$$\circledcirc^{p} [px^{\mu}, p(- y)^{-\nu}, pe^{z}] = \psi (x, y, z)$$

d'où : $$\psi^{p} (p^{\frac{1}{\mu}}x, p^{-\frac{1}{\nu}}y, z + \operatorname{Log} p) = \psi (x, y, z)$$

Cette relation est bien de la forme (21), et par suite ψ appartient bien à L'.

Corollaire 76.

La famille L est constituée par les f. d. r. de même type que celles que l'on déduit de L'' en effectuant sur chacune des variables U, V, W l'une des transformations :

$$U = X^{\mu} ; \quad U = (-X)^{-\nu} \quad ; U = \exp(X)$$

où μ et ν sont des constantes positives.

Ce corollaire est une conséquence directe de l'étude précédente, et sa généralisation à un nombre quelconque de variables est immédiate.

VII - CONSTRUCTION EFFECTIVE DES FONCTIONS DE L^2 AYANT UNE DENSITE -

a) D'après le corollaire 76, l'ensemble de ces fonctions se déduit par les transformations indiquées du sous-ensemble Ω constitué des f. d. r. $\circledcirc(x, y)$ possédant les propriétés suivantes :

1/ - Les variables X et Y sont positives, de lois marginales $e^{-\frac{1}{x}}$ et $e^{-\frac{1}{y}}$.

2/ - La fonction $\log \circledcirc(x, y)$ est homogène en x et y, de degré - 1.

3/ - La fonction $\circledcirc(x, y)$ a une densité $\circledcirc''_{x,y}$.

b) On peut toujours écrire une fonction $\circledcirc \in \Omega$ sous la forme

$$\circledcirc(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{y}\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + 1\right]\right)$$

Cherchons alors les conditions que doit vérifier la fonction $\varphi(t)$.

1/ - Densité.

La densité $\circledcirc''_{x,y}$ existe si et seulement si $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$ existent pour $t > 0$. ($t = y/x$). Dans ce cas :

$$x^4 t^2 \circledcirc''_{x,y} = \{ x t^2 \varphi''(t) + \varphi'(t) \left[\varphi(t) - t\varphi'(t) + 1\right] \} \circledcirc(x, y)$$

Cette densité $\circledcirc''_{x,y}$ doit être essentiellement positive. Or, le crochet qui figure au second membre est de la forme : ax + b ; pour que cette expression soit positive quand x varie de 0 à $+\infty$,a et b restant fixes, il faut et il suffit que a et b soient positifs. D'où les deux conditions :

$$\begin{cases} \varphi''(t) > 0 \text{ pour } t > 0 & (C_1) \\ \varphi'(t)\,[\varphi(t) - t\,\varphi'(t) + 1] > 0 \text{ pour } t > 0 & (C_2) \end{cases}$$

2/ - Lois marginales.

On a les deux conditions :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x=+\infty} \frac{1}{y}\,[\varphi(\frac{y}{x}) + 1] = \frac{1}{y} \\ \lim\limits_{y=+\infty} \frac{1}{y}\,[\varphi(\frac{y}{x}) + 1] = \frac{1}{x} \end{cases}$$

On voit aisément qu'elles sont respectivement équivalentes à :

$$\begin{cases} \varphi(t) \longrightarrow 0 \text{ avec } t & (C_3) \\ \varphi(t) \sim t \quad \text{quand } t \longrightarrow +\infty & (C_4) \end{cases}$$

Toute fonction $\varphi(t)$ vérifiant les conditions $C_1 \ldots C_4$ répond à la question.

D'après C_1, $\varphi(t)$ est convexe, $\varphi'(t)$ est monotone croissante. Donc $\varphi'(t)$ a une limite (finie ou infinie) quand $t \longrightarrow +\infty$ et, d'après la règle de l'Hospital :

$$\lim_{t=+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \lim.\ \varphi'(t)$$

Compte tenu de C_1, C_4 est donc équivalente à :

$$\lim_{t=+\infty} \varphi'(t) = 1 \qquad (C')$$

Pour étudier C_2, nous distinguerons deux cas :

α) $\varphi'(0) < 0$ La fonction $\varphi'(t)$ est croissante et tend vers 1 quand $t \longrightarrow +\infty$. Il existe alors un nombre $r > 0$ tel que :

$$\varphi'(t) < 0 \text{ pour } t < r$$

$$\varphi'(t) > 0 \text{ pour } t > r$$

La fonction $\psi(t) = \varphi(t) - t\,\varphi'(t) + 1$ doit être telle que :

$$\psi(t) > 0 \quad \text{pour } t > r \;;$$

or $\psi(t)$ est décroissante car sa dérivée est :

$$\psi'(t) = -t\,\varphi''(t) < 0.$$

On aura donc, à fortiori :

$$\psi(t) > 0 \text{ pour } t < r$$

et C_2 ne sera pas vérifiée dans l'intervalle $(0, r)$.

β) $\varphi'(0) > 0$ Dans ce cas, on a constamment $\varphi'(t) \geqslant 0$, et C_2 s'écrit : $\psi(t) > 0$. Puisque cette fonction est décroissante, il faut et il suffit que :

$$\lim_{t=+\infty} \psi(t) = \lim_{t=+\infty} \varphi(t) - t\,\varphi'(t) + 1 \geqslant 0$$

Cela revient à dire que l'ordonnée à l'origine $\varphi(t) - t\,\varphi'(t)$ de la tangente à la courbe : $\zeta = \varphi(t)$ admet une limite finie supérieure à -1 quand le point de contact s'éloigne indéfiniment. Comme $\varphi(0) = 0$, cette limite sera comprise entre 0 et -1.

En résumé :

Pour qu'une fonction $\varphi(t)$ convienne, il faut et il suffit :

- que $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$ existent pour $t > 0$

- que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \geqslant 0$, $\varphi''(t) \geqslant 0$

- que la courbe $\zeta = \varphi(t)$ ait une asymptote $\zeta = t + a$ avec :

$$-1 \leqslant a \leqslant 0.$$

Exemples.

1/ - En prenant $\varphi(t) = t$, on obtient le cas de l'indépendance :

$$\Theta(x, y) = \exp(-\frac{1}{x}).\ \exp(-\frac{1}{y}).$$

Il est assez curieux de constater que la courbe $\zeta = t$ correspondante est au-dessus de toutes les autres.

2/ - En prenant comme courbe $\zeta = \varphi(t)$ un arc d'hyperbole équilatère tangent en O à Ox, on obtient :

$$\Theta(x, y) = e^{-\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{xy}}$$

VIII - REMARQUES DIVERSES -

1/ - Dans l'hypothèse $k = 1$, si Y_n a une loi limite, Y_n^α a aussi une loi limite, que R. Fisher appelle la forme "pénultième" ; sa détermination à partir de la limite de Y_n est très simple.

Les lois limites pour les plus petites valeurs se déduisent des précédentes par le changement de variable $X' = -X$ déjà utilisé au ch. I.

2/ - Supposons qu'il existe des constantes $a_n > 0$, b_n et c_n telles que les variables :

$$U_n = a_n Y_n + b_n \, , \quad V_n = a_n Z_n + c_n$$

convergent légalement. Posons :

$$S_n = a_n M_n + \frac{1}{2}(b_n + c_n)$$

$$T_n = a_n R_n + (b_n - c_n)$$

L'indépendance asymptotique stricte presque complète de Y_n et Z_n s'étend évidemment à U_n et V_n . Il en résulte :

- que S_n et T_n convergent légalement ;

- que leurs limites peuvent se calculer directement à partir des limites U et V de U_n et V_n, les variables U et V étant indépendantes.

On obtiendrait de la même façon les lois limites de $M_n^{\alpha,\beta}$ et de $R_n^{\alpha,\beta}$ à partir des lois limites de $Y_n^{\alpha,\beta}$ et $Z_n^{\alpha,\beta}$. Les résultats de ces calculs sont d'ailleurs bien connus (par exemple, on les trouvera dans certains articles de Gumbel mentionnés à la fin de ce travail).

CHAPITRE VII

PROPRIÉTÉS DES ÉCHANTILLONS A DEUX DIMENSIONS

I - UN THEOREME D'INDEPENDANCE LIMITE -

THEOREME 77 -

Etant donné une f. d. r. $F(x, y)$, supposons qu'il existe un point (x_o, y_o) tel que :

$$F(x_o, y_o) = 1 \; ; \quad F(x, y) < 1 \quad \text{pour} \quad x < x_o \quad \text{ou} \quad y < y_o$$

$$(x_o \leqslant +\infty, \; y_o \leqslant +\infty)$$

Soit $\overline{X}_n$ et $\overline{Y}_n$ la plus grande abscisse et la plus grande ordonnée d'un échantillon de n points indépendants $M_1, \ldots M_n$ de loi $F(x, y)$.

Pour que $\overline{X}_n$ et $\overline{Y}_n$ soient asymptotiquement globalement indépendants (fortement), il suffit que :

$$\text{(C)} \quad \lim_{x=x_o,\, y=y_o} \left[\frac{1 + F(x, y) - F(x, y_o) - F(x_o, y)}{1 - F(x, y)} \right] = 0$$

Démonstration.

Des parallèles aux axes de coordonnées menées par le point $M(x, y)$ découpent le plan en quatre régions, de probabilités respectives :

$$p = 1 - q = F(x, y)$$

$$a = F(x_o, y) - F(x, y) \; ; \quad b = F(x, y_o) - F(x, y)$$

$$c = 1 - (p + a + b) = 1 + F(x, y) - F(x, y_o) - F(x_o, y)$$

La condition (C) peut s'écrire :

$$c/q \longrightarrow 0 \quad \text{quand } x \longrightarrow x_o \quad \text{et } y \longrightarrow y_o$$

ou encore : $c/(a + b) \longrightarrow 0$ " "

En vertu des hypothèses faites sur $F(x, y)$, les trois quantités a, b, et c tendent vers 0 quand $x \longrightarrow x_o$ et $y \longrightarrow y_o$.

On a d'ailleurs :

$$\lim_{x=x_o} \left\{ \frac{c(x, y)}{a(x, y)} \right\} = 0 \qquad \text{pour } y \leqslant y_1 < y_o$$

et :

$$\lim_{x=x_o} \left\{ \frac{c(x, y)}{b(x, y)} \right\} = 0 \qquad \text{pour } x \leqslant x_1 < x_o$$

Cela montre que la condition (C) doit être assez souvent vérifiée. La f. d. r. du couple $(\overline{X}_n, \overline{Y}_n)$ est : $F^n(x, y) = p^n$

Les lois marginales de $\overline{X}_n$ et $\overline{Y}_n$ sont :

$F^n(x, y_o) = (p + a)^n \quad ; \quad F^n(x_o, y) = (p + b)^n$

Pour qu'il y ait indépendance as. globale de $\overline{X}_n$ et $\overline{Y}_n$, il suffit que l'on ait :

$(C_1) \quad p^n - (p + a)^n \; (p + b)^n \underset{u}{\longrightarrow} 0 \quad$ avec $\quad 1/n$

Choisissons deux constantes $x_1 < x_o$ et $y_1 < y_o$. Il est clair que, dans toute région : $(x \leqslant x_1) \bigcup (y \leqslant y_1)$ la condition (C_1) est vérifiée. Il nous suffira donc de montrer qu'elle est satisfaite dans une région :

$$x_1 < x < x_o \quad ; \quad y_1 < y < y_o$$

où x_1 et y_1 peuvent être choisis arbitrairement voisins de x_o et y_o. Posons :

$$d = p^n \quad (p + a)^n \; (p + b)^n$$

$$= (1 - q)^n - [(1 - b - c)(1 - a - c)]^n$$

$$= (1 - q)^n - (1 - q + cq - c + ab)^n$$

$$= (1 - q)^n - (1 - kq)^n$$

avec :

$$k = 1 - c + \frac{c - ab}{q}$$

D'après (C), $c/q \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow x_o$ et $y \longrightarrow y_o$.

De plus :

$$ab/q < \frac{ab}{a + b} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } x \longrightarrow x_o, \quad y \longrightarrow y_o$$

Par suite, $k \longrightarrow 1$ quand $x \longrightarrow x_0$ et $y \longrightarrow y_0$.

h étant un nombre positif arbitrairement petit, il lui correspondra donc deux nombres $x_1 < x_0$, $y_1 < y_0$ tels que :

$$1 - h < k < 1 + h \quad \text{pour } x > x_1 \text{ , } y > y_1 \quad \text{(région R)}$$

La fonction d croissant avec k, on peut écrire dans R :

$$(1 - q)^n - [1 - (1 - h) q]^n < d < (1 - q)^n - [1 - (1 + h) q]^n$$

et, à fortiori :

$$(1 - q)^n - \frac{1}{1 - h} [1 - (1 - h) q]^n < d < (1 + h)(1 - q)^n - [1 - (1 + h) q]^n$$

Considérons la fonction :

$$f(q) = (1 - q)^n - \frac{1}{1 - h} [1 - (1 - h) q]^n$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\frac{1}{n} f'(q) = [1 - (1 - h) q]^{n-1} - (1 - q)^{n-1}$$

Elle est positive quand q est positif ; le maximum de $f(q)$ est donc atteint pour $q = 0$:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 - h} = \frac{-h}{1 - h} > -2h$$

Considérons maintenant la fonction :

$$g(q) = (1 + h)(1 - q)^n - [1 - (1 + h) q]^n$$

Sa dérivée, donnée par :

$$\frac{1}{n(1 + h)} g'(q) = -(1 - q)^{n-1} + [1 - (1 + h) q]^{n-1}$$

est négative pour $q > 0$; le maximum de $g(q)$ est donc atteint pour $q = 0$:

$$\beta = h$$

Ainsi l'on a dans R :

$$-2h < d < h$$

D'autre part, on pourra toujours associer aux nombres h, x_1, y_1, un entier N tel que : $n > N$ entraîne :

$$|d| < h \quad \text{pour} \quad (x \leqslant x_1) \cup (y \leqslant y_1)$$

On aura donc, dans tout le plan : $|d| < 2h$ pour $n > N$ et par suite:

$$d \underset{u}{\longrightarrow} 0 \quad \text{avec } 1/n \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

II - APPLICATION A LA LOI DE LAPLACE-GAUSS -

THEOREME 78 -

Les plus grandes valeurs $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_n$ des marges d'un échantillon de Laplace-Gauss à deux dimensions sont asymptotiquement globalement indépendantes (fortement).

Démonstration.

Il est toujours possible de supposer que la loi est réduite. Sa densité de probabilité est alors :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - r^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2rxy + y^2}{2(1 - r^2)}\right]$$

En appelant D le domaine $X > x$, $Y > y$, on a :

$$c = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

Considéré comme fonction de x, le trinôme : $T(x, y) = x^2 - 2rxy + y^2$ est minimum pour $x = ry$. On a donc :

$$x^2 - 2rxy + y^2 \geqslant (1 - r^2)\, y^2$$

De même $$x^2 - 2rxy + y^2 \geqslant (1 - r^2)\, x^2$$

On en déduit :

$$x^2 - 2rxy + y^2 > \frac{1 - r^2}{2}(x^2 + y^2),$$

et par suite :

$$2\pi\sqrt{1 - r^2}\, c < \iint_D \exp\left[-\frac{1}{4}(x^2 + y^2)\right] dx\, dy$$

$$= \int_x^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) dx . \int_y^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) dy$$

Or : $$\int_x^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) dx \sim \frac{2}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

On a donc : $$c < \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}\, xy} \exp\left[-\frac{1}{4}(x^2 + y^2)\right]$$

D'autre part :

$$b + c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})\, dx \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x} \exp(-\frac{x^2}{2})$$

et de même : $$a + c \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x} \exp(-\frac{y^2}{2})$$

Il résulte des relations précédentes :

$$\frac{a+b+2c}{c} > \sqrt{\frac{1-r^2}{2\pi}} \left(y \exp\left[-\frac{1}{4}(x^2-y^2)\right] + x \exp\left[\frac{1}{4}(x^2-y^2)\right]\right)$$

L'une des deux exponentielles figurant dans l'inégalité ci-dessus est $\geqslant 1$, donc le second membre croît indéfiniment quand $x \longrightarrow +\infty$ et $y \longrightarrow +\infty$. Cela entraîne :

$$\lim. \frac{c}{a+b+c} = 0 \quad \text{pour} \quad x \longrightarrow +\infty \quad \text{et } y \longrightarrow +\infty \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire 79.

La loi limite du couple $(\overline{X}_n, \overline{Y}_n)$ formé par les plus grandes valeurs des marges d'un échantillon normal à deux dimensions est du type:

$$\Phi\,(x, y) = \exp(-e^{-x}) \exp(-e^{-y})$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 79, compte tenu du fait que la loi limite de $\overline{X}_n$ est du type $\exp(-e^{-x})$.

III - LOCALISATION ASYMPTOTIQUE PRESQUE SURE DU "POLYGONE D'APPUI" D'UN ECHANTILLON NORMAL BIDIMENSIONNEL -

1/ - Soit $M_1, M_2, \ldots M_n$ un échantillon d'une loi normale à deux dimensions. Nous appelons "polygone d'appui" de cet échantillon le plus petit polygone convexe contenant tous ses points.

Nous allons voir qu'il est possible de localiser (asymptotiquement) presque sûrement ce polygone aléatoire entre deux ellipses homothétiques dont l'écart maximum tend vers 0 quand la taille de l'échantillon croît indéfiniment.

2/ - Moyennant une affinité, on peut toujours se ramener au cas où les deux variables X, Y sont indépendantes et ont pour écart-type $1/\sqrt{2}$. La densité est alors :

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp [-(x^2 + y^2)]$$

Si l'on effectue le changement de variables :

$$Z = OM = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\Theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) \qquad (0 < \theta < 2\pi)$$

les deux variables Z et Θ que l'on obtient sont indépendantes. Θ est répartie uniformément entre 0 et 2π, tandis que :

$$F_Z (z) = 1 - e^{-z^2}$$

3/ - En se reportant au théorème 53 (ch. 4), on verrait aisément que $F(z) \in \mathcal{K}$, c'est-à-dire que les plus grandes valeurs d'un échantillon $(Z_1, Z_2, \ldots Z_n)$ sont stables presque sûrement. Elles se concentrent au voisinage de :

$$a_n = G^{-1} \left(\frac{1}{n}\right) = (\text{Log } n)^{\frac{1}{2}}$$

Appelons $\overline{Z}_n^1, \overline{Z}_n^2, \ldots \overline{Z}_n^k \ldots$ les valeurs de l'échantillon ordonnées de la droite vers la gauche.

Nous allons d'abord déterminer une suite certaine ε_n telle que :

$$a_n - \varepsilon_n \underset{p.s.}{<<} \overline{Z}_n^1 \underset{p.s.}{<<} a_n + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \varepsilon_n \longrightarrow 0 \text{ avec } 1/n$$

a) La condition :

$$\overline{Z}_n^1 \underset{p.s.}{<<} a_n + \varepsilon_n$$

équivaut, d'après le théorème 6, à :

$$\sum G(a_n + \varepsilon_n) < \infty$$

c'est-à-dire : $\sum \exp [- (\sqrt{\text{Log } n} + \varepsilon_n)^2] < \infty$

Cette condition est satisfaite par :

$$\varepsilon_n = (\text{Log } n)^{-\frac{1}{2}} \text{ Log Log } n$$

car on a alors :

$$\exp [-(\sqrt{\text{Log } n} + \varepsilon_n)^2] \sim \exp(- \text{Log } n - 2 \text{ Log Log } n) = \frac{1}{n \text{ Log}^2 n}$$

b) La condition :

$$a_n - \varepsilon_n \underset{p.s.}{<<} \overline{Z}_n^1$$

est conséquence de : $a_n - \varepsilon_n \underset{p.co.}{<<} \overline{Z}_n^1$

Or, cette dernière condition équivaut à :

$$\sum F^n(a_n - \varepsilon_n) < \infty$$

Posons $u_n = F^n(a_n - \varepsilon_n)$; il vient :

$$\text{Log } u_n = n \text{ Log} \left\{1 - \exp\left[-\left(\sqrt{\text{Log } n} - \frac{\text{Log Log } n}{\sqrt{\text{Log} n}}\right)^2\right]\right\}$$

$$< -n \exp\left[-\text{Log} n + 2 \text{ Log Log} n - (\text{Log} n)^{-1} \text{Log Log}^2 n\right]$$

$$< -n \exp\left[-\text{Log} n + 2 \text{ Log Log} n\right] = -(\text{Log } n)^2$$

Donc : $u_n < \exp(-\text{Log}^2 n) = n^{-\text{Log} n}$

et par suite : $\sum u_n < \infty$

4/ - Nous allons maintenant chercher une suite d'entiers k_n, croissant indéfiniment avec n, et telle que :

$$a_n - \varepsilon_n \underset{p.co.}{<<} \overline{Z}_n^{k_n} \qquad (1)$$

Pour cela, reprenons l'étude faite lors de la démonstration du théorème 12. A présent, l'indice α est variable, et le second membre de la formule 4 (p. 16) sera équivalent à son premier terme si :

$$\frac{n\, G(a_n - \varepsilon_n)}{k_n} \longrightarrow \infty \text{ avec } n, \text{ c'est-à-dire si :}$$

$$(\text{Log } n)^2 / k_n \longrightarrow \infty \qquad (2)$$

Supposons cette condition réalisée, et considérons le rapport :

$$\rho_n = \frac{n(n-1)\ldots(n-k_n+2)}{n^{k_n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k_n - 2}{n}\right)$$

On a :

$$(k_n - 2)\,\text{Log}\left(1 - \frac{k_n - 2}{n}\right) < \text{Log } \rho_n < (k_n - 2)\,\text{Log}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Or, si (2) est vraie, k_n/n et k_n^2/n tendent vers 0 avec $1/n$ et par suite $\text{Log } \rho_n \longrightarrow 0$, donc $\rho_n \longrightarrow 1$.

En fin de compte :

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k_n+2)}{(k_n-1)!} F^{n-k_n+1}(a_n-\varepsilon_n)\, G^{k_n-1}\,(a_n-\varepsilon_n)$$

$$< F^n(a_n-\varepsilon_n)\,[\,nG(a_n-\varepsilon_n)\,]^{k_n-1} = w_n$$

La convergence de la série (w_n) entraînera la condition (1) si la condition (2) est satisfaite. On aurait alors :

$$\text{Log}\, w_n < -\exp\left[2\,\text{Log}\,\text{Log}\, n - \frac{(\text{Log}\,\text{Log}\, n)^2}{\text{Log}\, n}\right] + (k_n-1)\left[2\,\text{Log}\,\text{Log}\, n - \frac{(\text{Log}\,\text{Log}\, n)^2}{\text{Log}\, n}\right]$$

$$< -\exp\left[2\,\text{Log}\,\text{Log}\, n - \frac{\text{Log}\,\text{Log}^2 n}{\text{Log}\, n}\right] + 2\,k_n\,\text{Log}\,\text{Log}\, n$$

$$\sim -\text{Log}^2 n + 2\,k_n\,\text{Log}\,\text{Log}\, n$$

Si l'on prend :

$$k_n = \frac{1}{3}\,\text{Log}^2 n \,/\, \text{Log}\,\text{Log}\, n, \text{ on a :}$$

$$\text{Log}\, w_n < -\frac{1}{4}\,\text{Log}^2 n\,, \quad \text{donc} \quad \sum w_n < \infty$$

De plus, la condition (2) est bien vérifiée par cette valeur de k_n.

5/ - Les résultats déjà obtenus peuvent s'exprimer ainsi :

- Tous les points $M_1, M_2, \ldots M_n$ de l'échantillon sont asymptotiquement presque sûrement intérieurs à un cercle Γ_n de centre O, de rayon :

$$R_n = (\text{Log}\, n)^{\frac{1}{2}} + (\text{Log}\, n)^{-\frac{1}{2}}\,\text{Log}\,\text{Log}\, n$$

- Le nombre N(n) de ces points appartenant à la couronne limitée par Γ_n et Γ'_n (cercle de centre O, rayon $R'_n = \sqrt{\text{Log}\, n} - \frac{\text{Log}\,\text{Log}\, n}{\sqrt{\text{Log}\, n}}$) est asymptotiquement presque complètement supérieur a :

$$\frac{1}{3}\,\text{Log}^2 n/\text{Log}\,\text{Log}\, n.$$

Il nous reste à étudier la répartition des N points à l'intérieur de la couronne.

6/ - Soit $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_N$ les points de l'échantillon $\{M_i\}$ situés à l'extérieur de Γ'_n, et numérotés par ordre d'argument θ_i croissant. Appelons P_n le polygone $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_N$.

Partageons la région du plan extérieure à Γ'_n en ν_n domaines égaux par des demi-droites A_1u_1, A_2u_2, ... dont les prolongements passent par 0, et limitées à Γ'_n.

Si l'on choisit :

$$\nu_n = [(\text{Log } n)^{\frac{2}{3}}], \text{ on a :}$$

$$A_1A_2 \sim \frac{1}{2} A_1A_3 \sim 2\pi (\text{Log } n)^{-\frac{1}{6}}$$

La corde $\alpha\beta$ obtenue en joignant deux points pris dans la réunion de deux régions consécutives $u_1A_1A_2u_2$ et $u_2A_2A_3u_3$ sera nécessairement intérieure au domaine limité par les droites A_1u_1, A_1A_3, A_3u_3. Or, la distance d_n de O à A_1A_3 est telle que :

$$R'_n - d_n \sim 2\pi^2 (\text{Log } n)^{-\frac{5}{6}} < (\text{Log } n)^{-\frac{1}{2}} \text{ Log Log } n$$

Par conséquent, si le polygone P_n a au moins un sommet dans chacune des régions $u_iA_iA_{i+1}u_{i+1}$ (hypothèse H), il sera extérieur au cercle Γ''_n, de centre O, et de rayon :

$$R''_n = (\text{Log } n)^{\frac{1}{2}} - 2 \text{ LogLog } n \, (\text{Log } n)^{-\frac{1}{2}}$$

7/ - Montrons que l'hypothèse H est presque complètement sûrement réalisée pour n assez grand.

Supposons que :

$$N = k_n = \frac{1}{3} (\text{Log } n)^2 (\text{Log Log } n)^{-1}$$

La probabilité pour qu'un point μ_i tombe dans une région déterminée $u_jA_jA_{j+1}u_{j+1}$ est : $1/\nu_n$.

Donc la probabilité pour que, au cours de k_n épreuves, les points μ_i ne tombent jamais dans cette région est :

$$(1 - \frac{1}{\nu_n})^{k_n}$$

Enfin, la probabilité ϖ_n pour qu'il existe une région quelconque du type précédent dans laquelle ne tombe aucun point pendant les k_n épreuves est telle que :

$$\varpi_n < \nu_n (1 - \frac{1}{\nu_n})^{k_n}$$

Or :

$$\text{Log } \varpi_n \sim \frac{2}{3} \text{ LogLog } n + \frac{1}{3} \text{Log}^2 n (\text{LogLog} n)^{-1} \text{Log } [1 - (\text{Log } n)^{-\frac{2}{3}}]$$

$$\sim -\frac{1}{3} (\text{Log } n)^{\frac{4}{3}} (\text{LogLog } n)^{-1}$$

Par conséquent :

$$\sum \varpi_n < \infty$$

Compte tenu du fait que :

$$N \underset{p.co.}{>>} k_n$$

on voit alors que l'hypothèse H est presque complètement sûrement réalisée pour n suffisamment grand.

8/ - En résumé, on a :

$$P_n \subset \Gamma_n \qquad \text{as. presque sûrement}$$

et : $$\Gamma_n'' \subset P_n \qquad \text{as. presque complètement.}$$

Le polygone d'appui Ω_n de l'échantillon $\{M_i\}$ contenant aussi le polygone d'appui de P_n, on a finalement les relations asymptotiques :

$$\Gamma_n'' \underset{p.co.}{\subset} \Omega_n \underset{p.s.}{\subset} \Gamma_n$$

BIBLIOGRAPHIE

CRAMER H. - Mathematical methods of Statistics, p. 371, Princeton, 1946-

DODD E. L. - The greatest and the least variate under general laws of error. (Trans. of the Am. Math. Soc., vol. 25, N° 4 - pp. 525-539, New-York 1928)-.

DUGUE D. - [1] Eléments limites stochastiques (Bull. Inst. Intern. Statist., tome XXXIV, 2° livraison, 1954).

[2] Sur la convergence stochastique au sens de Cesaro et sur des différences importantes entre la convergence presque certaine et les convergences en probabilité et presque complète (Sankhya, Vol. 18, parts 1 and 2, May 1957, pp. 127-138).

Traité de statistique théorique et appliquée (1er fasc. : Analyse aléatoire) Masson éditeur, 1958.

ELFVING G. - The asymptotical distribution of range in samples from a normal population (Biometrika, Vol. XXXIV, parts I and II, Janv. 1947).

DE FINETTI B. - Sulla legge di probabilita degli estremi (metron, IX, 3-4, 1931).

FISHER R.A. et TIPPETT L.H.C. - Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample (Proc. Cam. Phil. Soc., vol. 24 ; part 2, pp. 180-190 - 1926).

FRECHET M. - [1] Eléments aléatoires (Monographies des Probabilités, Gauthier-Villars éd.).

[2] Sur la loi de probabilité de l'écart maximum (Annales de la Soc. polonaise de Math. Vol. 6, pp. 93-116, Cracovie 1927).

GNEDENKO B.V. - Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire (Ann. Math. vol. 44, p. 423).

GREENWOOD J.A. - Distribution of the mth range (Ann. Math. Stat., vol. 26 p. 772, 1955).

GUMBEL E.J. - Les valeurs extrêmes des distributions statistiques (Ann. I.H.P. 1935).

Ranges and midranges (Ann. Math. Stat. Vol. XV, p. 414, 1944)

The distribution of the range (Ann. Math. Stat., Vol. XVIII, p. 384, 1947).

Statistical theory of extreme value and some practical applications (Nat. Bur. of Standards, Appl. Math. series 33, Washington 1954).

The maxima of the mean largest value and of the range (Ann. Math. Vol. XXV, p. 76).

The mth range (Columbia Univ. tech. report T-11A, June 1957)

HARTLEY H.O. - The range in random samples (Biometrika, Vol. 32, pp. 334-348 1942).

HARTLEY H.O. et PEARSON E.S. - The probability integral of the range in samples of n observations from a normal population (Biometrika, Vol. 32 pp. 301-310, 1942).

KENDALL M.G. - Note on the distribution of the quantiles for larges samples (Suppl. Journ. Roy. Stat. Soc. Vol. 7, p. 83, 1941).

KHINTCHINE A. - Les lois limites des sommes de variables aléatoires indépendantes (Moscou 1938 ; en Russe).

KIMBALL B.F. - Assignement of frequences to a completely ordered set of data (Trans. Am. Geoph. Union, 27, 1946).

The bias of certain estimates of the parameters of the extreme value distribution (Ann. Math. Stat. Vol. 27, 1956).

LEVY P. - [1] Théorie de l'addition des variables aléatoires (Monographies des Probabilités, Gauthier-Villars, Editeur).

Mac KAY A. T. et PEARSON E. S. - A note on the distribution of range in samples of n (Biometrika, Vol. 25, pp. 415-420, 1933).

VON MISES R. - Uber die Variàtionsbreite einer Beobachtungsreihe (Berliner Math. gesellschaft, t. 22, p. 3, 1923).

La distribution de la plus grande de n valeurs (Rev. Math. de l'Union Interbalkanique, Vol. 1, N° 2, pp. 1-20, Athenes 1936).

PEARSON E. S. - A further note on the distribution of range in samples taken from a normal population (biometrika, Vol. 18, pp. 173-194, 1926).

The percentage limit for the distribution of range in samples from a normal population (Biometrika, Vol. 24, pp. 404-417, 1932).

PEARSON E. S. et DAVIES O. L. - Methods of estimating from samples the population standard deviation (Journ. of the Royal Stat. Soc. Supp. 1 p. 76, 1934).

PITMAN E. J. G. - Estimation of the location and scale parameters for a continuous population of any given form (Biometrika, Vol. 30 1939).

Tests of hypothesis concerning location and scale parameters (Biometrika, Vol. 31, 1939-40).

RIDER P. R. - The midrange of a sample as an estimation of the population midrange (Journ. Am. Stat. Ass. Dec. 1957, vol. 52, pp. 537-542).

SALVEMINI T. - Sui campioni di una massa discreta equidistributa : il campo di variazione (Statistica, N°1, Anno XVIII, 1958).

TIAGO DE OLIVEIRA J. - Estimators and tests for continuous populations with location and dispersion parameters (Rev. da Fac. Ciencias de Lisboa, 2° série, A, Vol. VI, Fasc. 1, pp. 121-146, 1957).

TIPPET L. H. C. - On the individuals and the range of samples taken from a normal population (Biometrika, Vol. 17, pp.364-87, 1925),

WILKS S. S. - Order statistics (Bull. Am. Math. Soc., Vol. 54, N° 1, part I, pp. 6-50, 1948).

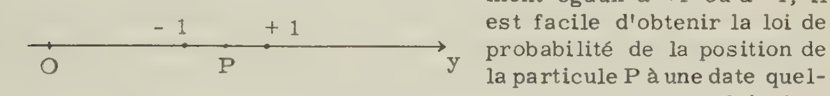
TABLE DES MATIERES

LE PROBLÈME DU MOUVEMENT BROWNIEN ET SES GÉNÉRALISATIONS

G. MALECOT

Le mouvement brownien et la théorie de la diffusion sont étudiés par beaucoup d'auteurs par passage à la limite à partir de la théorie de la "promenade au hasard" (théorie à laquelle est attachée le nom de Polya).

Si l'on imagine une particule se déplaçant sur un axe Oy et pouvant effectuer, à des dates déterminées constituant une suite dénombrable $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ des sauts d'amplitude unité, et si l'on suppose qu'il y a des probabilités données pour que ces sauts soient algébriquement égaux à +1 ou à -1, il est facile d'obtenir la loi de probabilité de la position de la particule P à une date quelconque, et cette loi n'est d'ailleurs autre que la loi de probabilité du gain total d'un joueur au bout de n parties d'un jeu de hasard simple tel que le jeu de pile ou face. Il est bien connu que la loi de probabilité réduite est, asymptotiquement, la loi de Laplace-Gauss.



Le schéma de la "promenade au hasard" peut être étendue à plusieurs dimensions, comme le fait Polya par exemple dans le cas d'un réseau de carrés qui schématise un réseau de rues.

Mais je ne m'étendrai pas aujourd'hui sur le cas multidimensionnel, car, ce que je voudrais signaler, ce sont différentes généralisations pour lesquelles les notations seront plus intuitives dans le cas d'une seule dimension (il est facile ensuite de les généraliser, ce que je ne ferai pas aujourd'hui).

Une première généralisation, qui ne présente aucune difficulté, consiste à supposer que les sauts possibles, au lieu d'être d'amplitude unité, admettent des valeurs algébriques α_i avec des probabilités respectives π_i.

Une deuxième généralisation consiste à admettre que les dates de ces sauts, au lieu d'être de dates données $t_1, t_2, \ldots t_n, \ldots$ sont aléatoires. L'hypothèse la plus simple, celle qui est à la base des processus stochastiques se rattachant à la loi de Poisson, consiste à admettre que, dans chaque intervalle de temps t, $t + \Delta t$, différents sauts de valeurs algébriques α_i sont possibles avec des probabilités respectives $\pi_i = \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$, (le dernier terme désignant un infiniment petit par rapport à Δt). Dans le cas où les α_i et les μ_i sont des constantes données, on a affaire à un processus permanent à accroissements indépendants, processus qui est continu en probabilité (la probabilité pour que l'accroissement d'abscisse pendant Δt dépasse en valeur absolue un nombre donné ϵ tend vers zéro avec Δt) mais non presque surement continu (il y a une probabilité finie pour un saut fini pendant un intervalle de temps non infiniment petit).

La loi de probabilité de la position au bout d'un temps fini n'est d'ailleurs pas la loi de Laplace-Gauss (comme ce serait le cas si le processus était presque surement continu), mais une "loi discontinue" dans laquelle la loi de probabilité de l'abscisse y à la date t (quand l'on prend pour origine O l'abscisse à la date zéro) a pour deuxième fonction caractéristique (fonction génératrice des cumulants) :

$$\psi(s, t) = \sum_i \mu_i t (e^{\alpha_i s} - 1) \tag{1}$$

(loi de probabilité d'une somme d'aléatoires indépendantes, obéissant à des lois de Poisson de sauts α_i et de paramètres $\mu_i(t)$).

Ce n'est qu'asymptotiquement, quand $t \to \infty$, que l'on retrouve, comme loi réduite, la loi de Gauss. Je n'insiste pas sur ces résultats très classiques, car ils sont établis en supposant que les α_i et les μ_i sont des constantes, c'est-à-dire qu'il s'agit de processus à accroissements indépendants. Or le mécanisme même du mouvement brownien montre que ce n'est que par une approximation discutable que l'on peut l'assimiler à un processus à accroissements indépendants. En réalité, le mouvement d'une particule P soumise à des chocs moléculaires (rappelons que nous nous plaçons, pour simplifier, dans le cas unidimensionnel), se fait pour une suite de secousses qui ne peuvent pas être regardées comme ayant des amplitudes α_i données indépendantes du mouvement déjà acquis par la particule. Si l'on applique la théorie classique du choc, chaque choc moléculaire se traduit par un changement de vitesse de la particule P, changement qui dépend à la fois de la vitesse v_i de la molécule heurtante (vitesse dont on peut certes supposer donnée la loi de distribution) et de la vitesse x de la particule P au moment du choc, vitesse qui dépend, elle, des chocs précédents.

Ces remarques montrent :

1°) que le processus stocnastique correspondant au mouvement brownien joue sur la vitesse de la particule P (que nous avons notée x) et non sur son abscisse (que nous avions notée y);

2°) que, si nous désignons par α_i les changements brusques de la vitesse de P qui correspondent aux chocs des différentes espèces possibles, les valeurs numériques des α_i dépendent de la vitesse x déjà acquise, et cela suivant la formule bien connue :

$$\alpha_i = \frac{(1 + l_i)m_i}{m + m_i}(v_i - x)$$

les molécules heurtantes étant supposées réparties en différentes "espèces" de vitesse v_i, de masse m_i, de coefficient de restitution l_i (m désignant la masse de la particule P).

Dans ce qui suit, nous poserons $\alpha_i = p_i(v_i - x)$, mais il y aura lieu de se souvenir que, dans le problème mécanique concret, $0 < p_i < 2$.

Il est évident que l'on n'a plus affaire à un processus stochastique à accroissements indépendants, puisque les α_i (accroissements possibles de la vitesse lors de chaque choc) dépendent de x. Et il en résulte que l'écart quadratique moyen σ de la vitesse x, au lieu d'augmenter indéfiniment avec le temps t (ce qui correspondrait au caractère asymptotiquement gaussien que l'on admet d'habitude) tend au contraire vers une limite finie quand $t \to \infty$. Nous allons, pour cela, étudier l'équation différentielle "stochastique" que vérifie la vitesse de P quand on la regarde comme une fonction aléatoire du temps t. Nous désignerons dorénavant cette vitesse - la vitesse acquise par la particule P à la date t - par X(t). (les majuscules étant réservées pour les variables des fonctions aléatoires et les minuscules pour leurs valeurs numériques).

L'accroissement $\Delta X(t)$ de la fonction aléatoire X(t) a par hypothèse des probabilités $\mu_i \Delta t + o(\Delta t)$ de prendre les valeurs α_i et nous supposerons que les parties principales $\mu_i \Delta t$ des probabilités de choc pendant l'intervalle t, $t + \Delta t$ avec les molécules des différentes espèces sont données, de telle sorte que seuls les α_i dépendent de l'état de la particule P, par l'intermédiaire de sa vitesse X(t), en vertu de la formule $\alpha_i = p_i [v_i - X(t)]$.

On peut écrire aisément la moyenne, la variance, et plus généralement les moments, et les cumulants, de l'accroissement $\Delta X(t)$ quand la valeur numérique de X(t) est connue et égale à x : nous appelons ces quantités les moments et cumulants conditionnés. Le moment conditionné d'ordre q, que nous noterons $\mathfrak{M}_c [(\Delta X)^q]$ sera

$$\mathfrak{M}_c [(\Delta X)^q] = \sum_i [\mu_i \Delta t + o(\Delta t)] [p_i (v_i - x)]^q$$

cette formule est valable, non seulement quand les différents sauts α_i possibles, dans un même intervalle, s'excluent, mais aussi quand ils sont stachastiquement indépendants[1].

Il est facile de voir que les cumulants conditionnés ont mêmes parties principales que les moments conditionnés. Le plus simple pour cela est de former la fonction caractéristique conditionnée de ΔX, qui est

$$\mathcal{M}_c(e^{s\Delta x}) = 1 + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{s^q}{q!} \mathcal{M}_c[(\Delta X)^q] = 1 + \sum_i [\mu_i \Delta t + o(\Delta t)] [e^{p_i(v_i - x)s} - 1]$$

On sait que le logarithme de cette fonction caractéristique conditionnée, qui est la fonction génératrice des cumulants conditionnés, admet même partie principale que la somme $\sum_i$, à savoir :

$$\text{(2)} \qquad H(x, s) \Delta t = \sum_i \mu_i (e^{p_i(v_i - x)s} - 1)\Delta t$$

Le développement de cette fonction en séries de puissances de s montre que ses coefficients (les "cumulants") sont des polynômes entiers en x de degré égal à leur ordre (x est, rappelons-le, la valeur numérique acquise par la fonction aléatoire à la date t). Or, toutes les fois qu'une fonction aléatoire à accroissements non indépendants jouit de cette propriété, il est toujours possible de déterminer par la méthode des moments sa loi de probabilité à une date quelconque t. Posons en effet $M_r(t) = \mathcal{M}\{[X(t)]^r\}$ (il s'agit là des moyennes et moments a priori calculés sans connaître aucune des valeurs numériques, sinon la valeur à la date zéro que nous supposerons nulle pour simplifier).

L'ensemble des moments $M_r(t)$ sera fourni par la "fonction caractéristique a priori" que nous noterons F(s, t) et qui sera par définition :

$$F(s, t) = \mathcal{M}[e^{sX(t)}] = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{s^r}{r!} M_r(t)$$

Et le théorème des moyennes conditionnées permet d'écrire :

$$F(s, t + \Delta t) = \mathcal{M}[e^{sX(t)} \cdot e^{s\Delta X(t)}] = \mathcal{M}[e^{sX(t)} \mathcal{M}_c\{e^{s\Delta X(t)}\}] =$$

$$= F(s, t) + \mathcal{M}[e^{sX(t)} H(X, s)] \Delta t + o(\Delta t)$$

D'où, par soustraction puis division par Δt que l'on fait ensuite

----

(1) Car la probabilité pour qu'il y en ait plusieurs dans l'intervalle Δt est alors infiniment petite par rapport à Δt.

tendre vers zéro :

(3) $$\frac{\partial F(s,\ t)}{\partial t} = \mathfrak{M}\,[H(X,\ s)\ e^{sX(t)}]$$ (formule de Bartlett)

Cette formule, très générale, s'applique à bien d'autres problèmes que le mouvement brownien.

a) Remarquons incidemment que si H était indépendant de X, c'est-à-dire, dans le cas où la fonction aléatoire est à accroissements indépendants, on déduit immédiatement de (3) la formule (1), car alors $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial(\log F)}{\partial t} = H(s)$.

b) Remarquons aussi que, dans le cas où H serait une fonction linéaire de X, le deuxième membre serait une fonction linéaire de F et de $\frac{\partial F}{\partial s}$ (puisque $\mathfrak{M}\,[Xe^{sX(t)}] = \frac{\partial F}{\partial s}$), la fonction caractéristique F(s,t) est alors solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre. C'est ce qui se passe dans le processus de "multiplication" de Furry (la variable aléatoire étant alors le nombre de particules, et non l'abscisse d'une particule) dans le processus de "naissance et décès" de Feller et dans le processus de Arley pour les rayons cosmiques.

c) Dans le cas où H est une fonction du deuxième degré de s, c'est-à-dire où seuls les deux premiers cumulants de ΔX ne sont pas d'ordre supérieur à Δt (c'est le cas étudié par Kolmogoroff et généralisé par Feller), c'est-à-dire où $H.\Delta t \equiv [sM + \frac{s^2}{2} v].\Delta t$ ($M.\Delta t$ et $v.\Delta t$ désignant les parties principales de la moyenne et de la variance conditionnée), un cas intéressant est celui où M et v sont respectivement du premier et du deuxième degré en x (comme dans un problème de génétique que j'ai traité par cette méthode, avec $v = \nu.x(1 - x)$ et $M = - k(x - \xi)$, x étant la fréquence d'un gène mendélien) l'équation aux dérivés partielles pour F est alors du deuxième ordre, mais les propriétés de la transformation de Laplace montrent que la densité de probabilité f(x, t) vérifie aussi une équation du deuxième ordre : $F(s,\ t) = \int e^{sx} f(x,\ t)dx$ est l'image de Laplace de l'originale f, donc, la dérivation par rapport à s est l'image de la multiplication par x, et la multiplication par s est l'image de la dérivation par rapport à x : dans ce cas l'équation de Bartlett pour la fonction caractéristique équivaut à l'équation de Kolmogoroff pour la densité de probabilité (dans le cas particulier que j'ai indiqué, l'équation de Bartlett est :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\ ks(\frac{\partial F}{\partial s} - \xi F) + \frac{\nu}{2}\ s^2(\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial^2 F}{\partial s^2});$$

et l'équation de Kolmogoroff s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = + \frac{\partial}{dx}\left(k(x - \xi)f\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\nu\, x(1 - x)f\right)$$

La deuxième équation peut se résoudre par séries hypergéométriques ou polynômes de Gegenbauer. L'étude des singularités aux bornes a été faite par Feller et Goldberg mais on peut aussi, à partir de la première équation, calculer les moments par résolution d'équations différentielles ordinaires.

d) Revenons au mouvement brownien, l'équation (3) ainsi que l'équation associée (pour la distribution, non absolument continue) par la transformation de Laplace, seraient toutes deux des équations aux dérivées partielles d'ordre infini. Mais la méthode des moments convient très bien.

On a en effet, d'après (2) et (3) :

$$\frac{\partial F}{\partial t} \sum_i \mu_i \; e^{s_i p_i v_i} \; F[(1 - p_i)s, t] - \sum_i \mu_i \; F(s, \; t)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{r=o}^{\infty} \frac{dM_r}{d\,t}\,\frac{s^r}{r!} = \sum_i \mu_i \left(\sum_{q=o}^{\infty} \frac{(sp_i v_i)^q}{q!}\right)\left(\sum_{r=o}^{\infty} M_r \,\frac{(1 - p_i)^r s^r}{r!}\right) - \sum_i \mu_i \sum_{r=o}^{\infty} M_r \frac{s^r}{r!}$$

L'identification des termes pour lesquels r = 1, 2, ..., conduit à des équations différentielles qui permettent de déterminer, par récurrence, les moments successifs. Ce sont des fonctions de t qui, quand $t \longrightarrow +\infty$, tendent vers des limites caractérisant la loi de probabilité "stationnaire" de la vitesse de la particule. On trouve aisément, pour limite de la moyenne $M_1(t)$ de cette vitesse :

$$M_1 = \frac{\sum_i \mu_i p_i v_i}{\sum_i \mu_i p_i}$$

(si les coefficients p_i étaient les mêmes pour toutes les molécules heurtantes, on aurait là une moyenne pondérée par les probabilités de rencontre - des vitesses des molécules heurtantes).

Mais la vitesse à chaque instant t de la particule heurtée pourra, bien entendu, être très différente de sa moyenne M_1. L'ordre de grandeur de l'écart aléatoire sera donné par l'écart quadratique moyen, racine carrée de la variance qui est, dans l'état stationnaire : $\sigma^2 = M_2 - (M_1)^2$ (M_2 désignant la limite du deuxième moment $M_2(t)$ quand

$t \to +\infty$. On trouve :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i \mu_i p_i^2 (v_i - M_1)^2}{\sum_i \mu_i p_i (2 - p_i)}$$

(qui diffère numériquement de la variance de la vitesse des molécules heurtantes, même dans le cas où les coefficients p_i sont les mêmes pour toutes).

Une fois que l'on a caractérisé la distribution de la vitesse de la particule l'on peut, par une intégrale stochastique, en déduire l'évolution au cours du temps de la distribution de la position. Mais il est tout indiqué de généraliser le problème et d'introduire, dans l'étude de la distribution de la vitesse X, la position (définie par Y) de la particule. Cela revient à étudier, au cours du temps, la distribution conjointe de X et Y (autrement dit, la distribution du "point aléatoire" que représente la particule dans l'espace des phases).

Cette étude peut naturellement être faite à différents points de vue, correspondant à des schémas différents. Je ne parlerai pas du schéma de Ornstein et Uhlenbeck, qui a été étudié par Doob. Je me bornerai à signaler que :

1°) On peut supposer que les circonstances des chocs, c'est-à-dire les μ_i, les p_i ou les v_i, dépendent de la position de la particule heurtée. Pour certaines lois simples de dépendance, l'étude numérique pourrait être faite, et étendue à plusieurs dimensions, ce qui fournirait quelques schémas stochastiques simples de la turbulence dans la "couche limite" comprise entre deux masses (solides ou fluides) de vitesses différentes.

2°) On peut aussi traiter le cas où la variation de la vitesse X de la particule pendant l'intervalle de temps Δt est due non seulement aux molécules heurtantes, mais aussi à un champ de forces dans lequel est placée la particule, champs de force qui se traduit par l'addition, à l'expression déjà écrite de ΔX, d'un deuxième terme traduisant l'impulsion $P.\Delta t$ produite par ce champ de forces dans l'intervalle Δt. Nous nous bornerons au cas particulier de l'"oscillateur brownien" (dont la première étude remonte à Yule qui avait posé le problème du "pendule bombardé au hasard par des particules") et qui a fait l'objet de récents travaux de Moyal et d'Edwards.

La force P est alors une attraction proportionnelle à l'abscisse donc de la forme $-\omega^2 Y$, et le système régissant la vitesse et la position, c'est-à-dire, les fonctions aléatoires X(t) et Y(t), est de la forme :

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta X(t) = -\omega^2 Y(t)\,\Delta t + \sum_i \mu_i\, p_i [v_i - X(t)]\,\Delta t + o(\Delta t) + \eta_1(t, \Delta t) \\ \Delta Y(t) = X(t)\,.\,\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

$\eta_1(t, \Delta t)$ étant une fonction aléatoire dont la moyenne conditionnée, (quand $X(t)$ et $Y(t)$ sont connus) est nulle, mais dont la variance conditionnée doit, en vertu de l'hypothèse faite sur les chocs, dépendre de la valeur déjà acquise par $X(t)$ (alors que Moyal et Edwards, comme leurs prédécesseurs, admettent que la loi conditionnée de $\eta_1(t, \Delta t)$ est indépendante de ce qui précède, c'est-à-dire, si l'on s'en tient au deuxième ordre, admet une variance constante). Nous devons prendre pour variance conditionnée de $\eta_1(t, \Delta t)$: $w_{11}.\Delta t = \sum_i \mu_i\, \alpha_i^2 .\Delta t$ (qui dépend, de façon quadratique, de $X(t)$).

Or c'est là un cas particulier du problème général des "processus de Markoff à moyennes linéaires", qui consiste à étudier le "vecteur aléatoire" défini (dans le cas de deux dimensions, cas qui d'ailleurs se généralise sans difficulté) par :

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta X(t) = A_1(t) + l_{11}X(t)\Delta t + l_{12}Y(t)\Delta t + \eta_1 \\ \Delta Y(t) = A_2(t) + l_{21}X(t)\Delta t + l_{22}Y(t)\Delta t + \eta_2 \end{cases}$$

(A_1 et A_2 fonctions certaines de t).

Les η ayant des moyennes conditionnées nulles et des covariances conditionnées $\mathfrak{M}_c(\eta_i \eta_j) = w_{ij}.\Delta t + o(\Delta t)$ qui peuvent dépendre de $X(t)$ et de $Y(t)$ (processus de Markoff), et même des valeurs antérieures (processus non markovien).

Ce système permet d'étudier les variances a priori de X et Y en fonction de t, et leur évolution quand $t \longrightarrow +\infty$. Il faut évidemment calculer d'abord leurs moyennes a priori, $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, qui sont données par le "système déterministe" déduit de (5) en remplaçant η_1 et η_2 par leurs moyennes a priori nulles. Ce système fournit :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d\overline{X}}{dt} = A_1(t) + l_{11}\overline{X}(t) + l_{12}\overline{Y}(t) \\ \dfrac{d\overline{Y}}{dt} = A_2(t) + l_{21}\overline{X}(t) + l_{22}\overline{Y}(t) \end{cases}$$

Quand A_1 et A_2 sont des constantes, ce système fournit pour $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, quand $t \longrightarrow +\infty$, des limites bien déterminées à condition que le système

homogène associé soit amorti. Or c'est le cas quand les coefficients ont les valeurs numériques fournies par (4) puisqu'il s'agit alors du système déterministe bien connu régissant le "pendule en milieu résistant" (la résistance du milieu étant ici ramenée aux chocs moléculaires). La limite est alors, pour la vitesse : $\bar{X} = 0$, et pour la position $\bar{Y} = \frac{\sum_i \mu_i p_i v_i}{\omega^2}$. La vitesse de tendance vers ces limites est d'ailleurs caractérisée par les valeurs propres du système homogène associé à (6), valeurs qui sont les racines de :

$$\rho^2 + (\sum_i \mu_i p_i)\rho + \omega^2 = 0$$

Pour revenir aux variances (et covariances) a priori, $v_{ij}(t)$, il suffit de retrancher (5) et (6), de former les carrés et les produits, de prendre les moyennes conditionnées pour $X(t)$ et $Y(t)$ fixés - ce qui fait apparaître les w_{ij} - puis de prendre les moyennes a priori; dans le problème des mouvements browniens, comme w_{11} - seule covariance conditionnée non nulle - ne dépend de $X(t)$ que de façon quadratique, w_{11} ne dépend que de $\bar{X}_i(t)$ et de $v_{11}(t)$, ce qui permet d'écrire un système différentiel linéaire pour les variances (et covariances) a priori.

On peut montrer que ce système différentiel a encore des valeurs propres de parties réelles négatives et fournit pour limites quand $t \longrightarrow +\infty$ des variances et covariances a priori (en posant $\lambda = \frac{1}{4} \sum_i \mu_i p_i (2 - p_i)$ les valeurs suivantes :

$$v_{11} = \frac{\sum_i \mu_i p_i v_i^2}{4\lambda}, \qquad v_{12} = 0, \qquad v_{22} = \frac{\sum_i \mu_i p_i v_i^2}{4\lambda\omega^2}$$

qui définissent le régime aléatoire stationnaire du pendule.

On peut également étudier les "covariances décalées" ("lag corrélations"), qui sont les moyennes a priori des quantités $X(t)\,X(t')$, $(t \geqslant t')$, $X(t)\,Y(t')$, etc., si on les appelle $v_{ij}(t, t')$, on trouve aisément que : $\frac{\partial v_{ij}(t, t')}{\partial t} = \sum_k l_{ik} v_{kj}(t, t')$. Leur loi de variation avec t est donc fournie par les solutions du système homogène associé à (6); elles sont amorties et tendent donc vers zéro dans les mêmes conditions - elles sont exponentielles dans les mêmes conditions, avec mêmes pseudo-périodes et mêmes coefficients d'amortissement. Donc, pour tout système de Markoff à moyennes linéaires et à coefficients constants (même si les covariances conditionnées ne sont pas constantes) les formules de Walker-Moyal subsistent.

IMP. LOUIS-JEAN — GAP
Dépôt légal n° 129 — 1959